MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI

DR. FAZEKAS FERENC

B. V.

NUMERIKUS ÉS GRAFIKUS KÖZELÍTŐ MÓDSZEREK

ÍRTA

DR. BÁLINT ELEMÉR

HARMADIK, VÁLTOZATLAN KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1978

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI

DR. FAZEKAS FERENC

EGYETEMI DOCENS,
DR. MATH. SC.

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR,
A MŰSZ. TUD. DOKTORA

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS,
A MŰSZ. TUD. KANDIDÁTUSA

★

SZEMLÉLTETÉS

GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK



TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1978

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. Középiskolai matematika (Ötödik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Negyedik kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Negyedik kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Ötödik kiadás)
A. V*. Határozott integrál (Első rész) (Negyedik kiadás)
A. V**. Határozott integrál (Második rész) (Harmadik kiadás)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Negyedik kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Negyedik kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Negyedik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Negyedik kiadás)
A. X*. A logarléc (Hatodik kiadás)

B.

B. I—II—III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája Skalár-, vektor- és tenzormezők (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Negyedik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Harmadik kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok (Harmadik kiadás)
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Ötödik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész) (Harmadik kiadás)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás (Harmadik kiadás)
C. III. Integrálegyenletek (Harmadik kiadás)
C. IV. Mátrixszámítás (Negyedik kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Harmadik kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

B. V.

NUMERIKUS ÉS GRAFIKUS KÖZELÍTŐ MÓDSZEREK

ÍRTA
DR. BÁLINT ELEMÉR
NY. EGYETEMI DOCENS

HARMADIK, VÁLTOZATLAN KIADÁS

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTÉK

DR. KÖRMENDI ISTVÁN
V. EGYETEMI ADJUNKTUS

DR. HAJÓS GYÖRGY
KOSSUTH-DÍJAS AKADÉMIKUS,
EGYETEMI TANÁR

KORRIGÁLTA
SZABÓ ISTVÁN
TANÁR

ISBN 963 17 2978 8

KIADÁSÁT
AZ OKTATÁSI MINISZTER
RENDELTE EL

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy a műszaki igényeknek megfelelő magyar matemetikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása a műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkozunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredmények közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a kölönleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült a rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt*, megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert igérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak*, különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek*, amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen, az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentősen segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplínáját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és e miatt mindinkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. IV.

Az utóbbi második kiadások fél éven belüli elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan kroszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSzK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a Minisztérium, a Kiadó és nem utolsósorban a műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. febr. 15. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

Ennek az előszónak csak szűkre szabható terjedelme nem teszi lehetővé, hogy részletesen kifejtsem azokat a szempontokat, amelyek e kötet szerkesztésében vezettek. Csak néhány megjegyzésre szorítkozhatom.

A közelítő módszerek anyaga terjedelmes. Legjobb tudomásom szerint el kellett döntenem, hogy mit tekintsek fontosabbnak, mert sokat mellőzni kellett. El kellett továbbá döntenem, hogy az anyag mely elrendezését fogadjam el legcélszerűbbnek, tudván, hogy itt-ott kénytelen vagyok a szigorú következetességet megsérteni. Végül el kellett döntenem, hogy mennyi magyarázatot adjak az olvasónak a feladatok kitűzése előtt, ha el akarom kerülni, hogy az olvasó e segédkönyvet önállóan ne tudja használni.

Ez a kötet azokkal a feladatokkal foglalkozik, amelyeknek közelítő megoldásában a hibaforrások közül az adatok és a műveletek hibái dominálnak. A sorozatnak még több más kötete is foglalkozik közelítő számításokkal, olyanokkal, amelyeknek feladatanyagában a képlethiba dominál.

Külön kötet fog foglalkozni a grafikus módszerek közül a nomográfiával.

A sorozat későbbi köteteiben kapnak helyet a differenciálegyenletek, integrálegyenletek és más bonyolultabb feladatok közelítő megoldásai.

E kötet végén „Felhasznált irodalom" címen sorolom fel azokat a műveket, amelyekből a feladatok egy részét — változtatás nélkül vagy több-kevesebb módosítással — válogattam. Nem láttam célszerűnek, hogy a feladatgyűjteményben minden egyes ilyen feladatnál idézzem azt a helyet, ahonnan a feladatot átvettem. Ilyen idézetek a könyv nyomását és olvasását megnehezítenék. Hivatkozom azonban az irodalomra ott, ahol az idézett feladat vagy tétel tankönyvekben még nem található meg, hanem csak az idézett szerző eredeti dolgozataiban.

Köszönetet mondok mindazoknak, akik munkámban segítettek. Elsősorban *Hajós György* akadémikus professzornak tartozom köszönettel, akinek részletes bírálata alapján sok helyen a tartalmat is, a kifejezés módját is érintő javításokra nyílt alkalmam. Köszönöm *Körmendi István* egyetemi adjunktusnak számos tanácsát, amelyekkel a szabatos szövegezésben és a műszaki feladatok helyes megfogalmazásában volt segítségemre. *Nagy Sándor* egyetemi docens a feladatanyag gazdagításáért, *Marton Tibor* egyetemi docenst bíráló megjegyzéseiért illeti köszönetem. *Fazekas Ferenc* egyetemi adjunktus a szerkesztő köteles figyelmét messze meghaladóan volt segítségemre tanácsaival. *Gyurcsy Endre* mérnök kartársat az ábrák elkészítésén kívül az ezekre vonatkozó tanácsaiért is illeti köszönetem. Végül — de nem utolsósorban — köszönetet mondok a kiadónak áldozatkészségéért, és az *Egyetemi Nyomdának* gondos munkájáért.

Budapest, 1955. április havában.

DR. BÁLINT ELEMÉR

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK ÉS HARMADIK KIADÁSÁHOZ

A második kiadásban a közelítő érték hibájának értelmezését át kellett fogalmazni a Magyar Népköztársaság Országos Szabványának (MSZ 316. sz.) megfelelően. Ez a szabvány az első kiadás megjelenése után — 1956-ban — keletkezett, és eltér az első kiadásban adott definíciótól. A definíció megváltoztatása maga után vont néhány változtatást a későbbi szövegben is.

Ezen túlmenően az új kiadás csak egy új lábjegyzetben és néhány apró helyreigazításban tér el az előzőtől.

Budapest, 1964. márc. 15., 1977. márc. 15.

DR. BÁLINT ELEMÉR,
DR. FAZEKAS FERENC

E KÖTET

TARTALOMJEGYZÉKE

1. §. A HIBA

2. §. A POLINOM

FELADATOK

FELADATOK

3. §. DIFFERENCIASZÁMÍTÁS

FELADATOK

4. §. EGYENLETEK MEGOLDÁSA

FELADATOK

FELADATOK

FELADATOK

5. §. GRAFIKUS MÓDSZEREK

FELADATOK

EREDMÉNYTÁR

1. §. A HIBA

a) A hiba fogalma

α) A műszaki feladatok megoldásáról

A műszaki feladatokat úgy oldjuk meg, hogy az „adatok"-ra a „műveletek" egy sorozatát, mégpedig mindig véges számú lépésből álló sorozatát alkalmazzuk.

A megoldás első szakasza az elvégzendő műveletek megállapítása: *a képlet meghatározása,* második szakasza a műveletek elvégzése: *a számolás.*

A feladat megoldásának befejező szakasza: *az eredmény* ***hibájának*** *becslése.*

Ez a harmadik szakasz sokszor összefonódik a megoldás előző szakaszaival, néha meg is előzi azokat.

Az adatok: mérések vagy előző számítások eredményei. Ritkán pontos mennyiségek. Például egy kör keresztmetszetű cső átmérője

$$\varnothing\ d = 25{,}4 \text{ mm} \pm 0{,}1 \text{ mm} \tag{1.1}$$

értékkel van megadva. Ez az adat azt jelenti, hogy a cső átmérője 25,3 mm-nél nem kisebb és 25,5 mm-nél nem nagyobb. Tehát itt az adat nem egy számmal, hanem egy számközzel (szakasszal) van meghatározva.

Az adatra vonatkozó műveleteket általában a számköz határainak középértékével, a példában 25,4 mm-rel végezzük.

Sokszor kénytelenek vagyunk még valamely pontosan megjelölt adattal is úgy számolni, mintha az csupán számközzel volna meghatározva. Ha például a cső átmérőjéből a keresztmetszet területét kell kiszámítani, $\frac{d^2}{4}$-et meg kell szorozni π-vel. Ez utóbbi szám egyértelműen van meghatározva, mégis úgy számolunk vele, mintha egy számközzel volna meghatározva, például a (3,135; 3,145) számközzel helyettesítjük. A területet úgy számítjuk ki, hogy $\frac{d^2}{4}$-et nem π-vel, hanem 3,14-dal szorozzuk.

A képletben a pontos megoldáshoz megkívánt műveleteket sokszor másokkal helyettesítjük, olyanokkal, amelyek már nem vezetnek pontos eredményhez, viszont elvégzésük könnyebb. Az így származó képleteket *közelítő képleteknek* nevezzük. Például a megoldáshoz egy konvergens végtelen sort kellene összegezni. A közelítő művelet a végtelen sor valamely részletösszegének — egy polinomnak — kiszámítása. Vagy a megoldást egy integrál szolgáltatja. A közelítő művelet a függvénygörbébe beírt törtvonal alatti terület kiszámítása. Vagy egy transzcendens egyenlet gyökét közelítőleg egy algebrai egyenlet gyökével helyettesítjük.

A hibát, amelyet a közelítő művelet alkalmazása okoz, ***képlethibának*** *nevezzük. Azt a hibát pedig, amelyet a műveletek pontos végrehajtása helyett azok közelítő végrehajtásával okozunk,* ***műveleti hibának*** *nevezzük.*

A műszaki feladatok vázolt megoldásai tehát csak közelítőleg helyesek. A hibának három forrása:

az adatok hibája,

a képletek hibája,

a műveletek hibája.

Ha a műszaki feladatot csak közelítőleg oldottuk meg — és ez ritkán van másként — meg kell becsülnünk a megoldás befejezéséül, hogy a három forrásból eredő hibák együtt mekkora hibát okoztak az eredményben. Minden közelítő eljárásnál a megoldást ki lehet, és sokszor ki kell egészíteni a ***hibabecsléssel.***

A hibabecsléssel vagy azt akarjuk elérni, hogy az adatok, a képletek és a műveletek hibájából a megoldás hibájának egy korlátját tudjuk lemérni, vagy a fordított — többnyire nehezebb — feladatot kell megoldanunk: meg kell határoznunk az adatok, a képletek és a műveletek megengedett hibáinak olyan korlátait, hogy az eredményt a megengedett hibával kapjuk meg.

A műszaki feladatok megoldásánál a mérnök sokszor elhanyagolja a hiba becslését. Szükséges mégis, hogy a hibabecslés módszereit ismerje. Ezeknek a módszereknek ismeretében tudja eldönteni, hogy kielégíti-e feladatának közelítéssel kiszámított megoldása a megkívánt pontosságot, másrészt megtakaríthatja számításában azokat a lépéseket, amelyek a megkívánt vagy elérhető pontosság korlátain túlmennek.

β) A közelítő érték és hibája

1°. Értelmezés. Ha a feladatban — akár annak adataiban, akár az eredményekben — valamely mennyiség X pontos értékét a tőle különböző x számmal helyettesítjük, utóbbit *közelítő értéknek* és a

$$h = x - X \tag{1.2}$$

különbséget *a közelítő érték hibájának* nevezzük.

Ha a hiba negatív, vagyis $X > x$, azt mondjuk, hogy x hiánnyal (balról, alulról) közelít.

Ha a hiba pozitív, vagyis $X < x$, a közelítő érték többlettel (jobbról, felülről) közelít.

Jelmagyarázat:

$$X \approx x \tag{1.3}$$

azt jelenti, hogy x közelítő értéke X-nek.

A feladatokban szereplő mennyiségek pontos értékét általában nem ismerjük. Ebből következik, hogy a közelítő érték hibáját sem ismerhetjük. Ez nem is szükséges. Elég, ha a hibát meg tudjuk becsülni.

Ha meg tudunk adni olyan m (pozitív) számot, amelynél a hiba abszolút értéke nem nagyobb, akkor azt mondjuk, hogy a hibát megbecsültük és m-et ***hibakorlátnak*** *nevezzük:*

$$|h| = |X - x| \leq m. \tag{1.4}$$

A hibakorlát *dimenziója* megegyezik a mérendő vagy kiszámítandó mennyiség dimenziójával. Hosszúság hibakorlátja hosszúság, időé idő.

A hibakorlát nem egyértelműen meghatározott szám. Minden nagyobb szám is korlátja a hibának*. A hibabecslést „javítjuk", ha sikerül kisebb hibakorlátot meghatároznunk. A hibakorlát azonban nem lehet kisebb, mint a pontos hiba abszolút értéke. A hibakorlát ismeretében el tudjuk dönteni, hogy a közelítő érték a feladat megoldására használható-e vagy sem (hogy a megoldás a feladat „tűrésének„ határán belül van-e).

II°. A közelítés pontossága. Az (1.1) kifejezés azt jelenti, hogy a körátmérő közelítő értéke 25,4 mm, és a közelítés hibájának korlátja 0,1 mm. Ezt a tényállást úgy is szoktuk kifejezni, hogy a „közelítés pontossága" 0,1 mm, vagy úgy, hogy a körátmérő 0,1 mm pontossággal 25,4 mm hosszú.

Különös figyelmet érdemel az a — többnyire hallgatólagos — megállapodás, amely a tizedes törttel megadott közelítő értékek pontosságára vonatkozik. Ha a műszaki feladatban például egy hosszúság közelítő értékét a pontosság közelebbi megjelölése nélkül helyesen akarjuk megadni, akkor 25,4 mm annyit jelent, hogy a közelítő érték hibájának korlátja 0,05 mm, vagyis az utolsó számjegy helyi értékének fele. Ha tehát a hiba korlátja 0,005 mm volna, a közelítő értéket 25,40 mm-ben kell megjelölni, bár a századrészek helyén álló 0 nem módosítja az egyetlen tizedes jeggyel meghatározott közelítő értéket. Ha ettől a megállapodástól el akarunk térni, azt külön meg kell említeni. Ilyen eltérésre utal az ilyen megjegyzés: „a kör átmérője egy tizedes pontossággal (vagy rövidebben: tizedrész pontossággal) 25,4 mm". Ekkor a hiba korlátja nem 0,05 mm, hanem 0,1 mm.

III°. A relatív hiba és a relatív hiba korlátja. Ha egy százados mérleg 1 kg-ra pontos, jól használható kocsirakományok súlyának megmérésére. Ugyanilyen hibakorláttal a kereskedelmi mérleg az élelmiszerüzletben nem használható. Az a hiba, amely megengedhető az iskolásgyerekek vonalzójának cm-beosztásánál, nem engedhető meg a logarlécen. A közelítő érték megengedhető hibáját többnyire az dönti el, hogy a közelítő érték hibájának korlátja milyen töredéke lehet a megmérendő (kiszámítandó) mennyiségnek.

A relatív hiba a hiba viszonya a megmérendő (kiszámítandó) mennyiséghez. A relatív hiba korlátja a hibakorlát viszonya a megmérendő (kiszámítandó) nmennyiséghez.

Minthogy pedig a megmérendő mennyiség pontos (valódi) értékét általában nem ismerjük, csak annak közelítő értékét, a relatív hibát és a relatív hiba korlátját meghatározó viszonyban a nevezőt a megmérendő (kiszámítandó) mennyiség közelítő értékével helyettesítjük. Ez a gyakorlatban annál inkább elfogadható, minél kisebb a relatív hiba. A relatív hiba és a relatív hiba korlátja egyenlő dimenziójú számok viszonya, tehát *nevezetlen számok*. Többnyire százalékban (%) vagy ezrelékben (‰) vannak megadva. A relatív hiba korlátja meghatározza a közelítő érték *„relatív pontosságát"*. Méréseknél a relatív hibát tekintjük a *„megbízhatóság"* mértékének.

Ha X közelítő értékét x-szel jelöljük, a hiba korlátját m-mel és a relatív hiba korlátját r-rel, a két korlát között az összefüggés

$$m = X \cdot r \approx x \cdot r.$$

* Sokszor beszélünk pongyolán a hiba korlátjáról vagy a relatív hiba korlátjáról, mikor pontosan a hiba, illetve a relatív hiba *valamely* korlátját kellene említenünk.

γ) A függvénytáblázatokról

A megoldásnak abban a szakaszában, amelyben a műveleteket végre kell hajtani, fontos szerepük van a függvénytáblázatoknak.

A függvénytáblázatokban a függvények közelítő értékei
vagy 1. a hibakorlátra,
vagy 2. a relatív hibakorlátra
vonatkozó azonos szabály szerint vannak megadva.

Az 1. típusba tartoznak például azok a logaritmustáblázatok, amelyekben a mantisszák egyenlő számú, pl. 4 tizedest tartalmaznak. Ezekben minden függvényértékre a hibakorlát közös: az utolsó tizedesjegy helyi értékének fele. A 4 tizedest tartalmazó mantisszatáblázatban a negyedik tizedes jegy felfelé kerekítéssel van meghatározva, ha az ötödik tizedes helyén 5 vagy 5-nél nagyobb szám állna. Ellenkező esetben a negyedik után következő tizedesek el vannak hanyagolva. A közös hibakorlát

$$5 \cdot 10^{-5},$$

más szóval a táblázat értékeinek pontossága 5 százezred. Ha a szinuszfüggvény táblázatában a függvényértékek 4 tizedesre vannak megadva, sin 30° értékét nem 0,5-del, hanem 0,5000-del kell megadni.

A 2. típusba tartozó táblázatok egyenlő számú, pl. mindig 7 számjegyet tartalmaznak. (Nem a tizedes jegyek száma, hanem az összes jegyek száma van meghatározva.) Például

$$e^x$$

hétjegyű függvénytáblázatában az $x = 4{,}6$ kitevőhöz tartozó függvényérték 99,48432 öt tizedesjegyet tartalmaz, mert az egész rész kétjegyű, míg az $x = 4{,}7$ kitevőhöz tartozó függvényérték 109,9472 csak négy tizedes jegyet tartalmaz, mert az egész rész háromjegyű. A relatív hiba tehát

$$5 \cdot 10^{-8} \quad \text{és} \quad 5 \cdot 10^{-7}$$

között mozog.

A logarléc is a 2. típusba tartozó függvénytáblázatot helyettesít, de rajta a relatív hiba ingadozása még kisebb. Bal végén 4 értékes jegyet lehet rajta leolvasni, jobb végén 3 értékes jegyet (az utolsót becsléssel). De a relatív hiba mindkét esetben — a közbenső szakaszokon is — 1‰ körül mozog (majdnem állandó). Ugyanezzel a jelenséggel találkozunk a függvénypapirok közül a logpapirokon is.

Azt a hibát becsülni, amelyet számértékeknek függvénytáblázatokból való kikeresése, visszakeresése hosszabb számításoknál az eredményben okoz, bonyolult feladat. Jól használható szabályokat találunk ennek a feladatnak megoldására *Hajós György* dolgozatában: „A hibabecslés alapjai"-ról a Matematikai és Fizikai Lapok 49. kötetében (1942), amelyet az érdeklődő figyelmébe ajánlunk. Ezeket a szabályokat példákon mutatjuk be.

Példák

Kikeresendő a 4 tizedest feltüntető logaritmustáblázatból

$$\lg a,$$

$$a = 3256 \pm 14, \quad (\text{hibakorlát } k = 14).$$

$$\lg 3260 = 3{,}5132$$
$$\lg 3250 = 3{,}5119$$
$$\text{táblázati különbség} \quad d = 13.$$

Arányosan közbeiktatva

$$\lg 3256 = 3{,}5119 + 0{,}0008 = 3{,}5127.$$

A hibakorlát az eredmény utolsó kiírt számjegyének helyértékében

$$K \approx \frac{d+1}{n} \cdot k + 1 = 1{,}4 \cdot 14 + 1 < 21.$$

Tehát

$$\lg a = 3{,}5127 \pm 21 \cdot 10^{-4}.$$

2. Visszakeresendő a, amelynek logaritmusa

$$\lg a = 1{,}7563$$

0,0004 hibakorláttal van megadva. Az adat utolsó kiírt számjegyének helyértékében kifejezve a hibakorlát $K = 4$.

$$1{,}7566 = \lg 57{,}1$$
$$1{,}7559 = \lg 57{,}0$$

táblázati különbség $7 = d$.

Arányosan közbeiktatva

$$1{,}7563 = \lg 57{,}06.$$

A visszakeresett szám k hibakorlátja az eredmény utolsó kiírt számjegyének helyértékében

$$k \approx \frac{n}{d-1} \cdot K + 1 = \frac{10}{6} \cdot 4 + 1 < 8.$$

A visszakeresett szám

$$57{,}06 \pm 8 \cdot 10^{-2}.$$

* * *

A számos függvénytáblázat közül felsoroljuk a következő néhányat:

Barlow's Tables of squares, cubes, square roots, cube roots and reciprocals.
Szegal—Szemendjajev: Pjatiznacsnije Matematicseszkije Tablici (ötjegyű).
Vega: Logaritmisch-Trigonometrisches Handbuch (hétjegyű).
Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch I. Band.
Emde F.: Tafeln elementarer Funktionen.
Hayashi K.: Fünfstellige Funktionentafeln.
Hayashi K.: Tafeln der *Bessel*schen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen.
Hayashi K.: Tafeln der Differenzenrechnung sowie für die Hyperbel-, *Bessel*schen, elliptischen und anderen Funktionen.
Jahnke—Emde: Tafeln höherer Funktionen.
Strutt M. I. O.: *Lamé*sche, *Mathieu*sche und verwandte Funktionen in Physik und Technik.

Feladatok

1. 1/3 m-t (pontos érték) 33 cm-rel (közelítő érték) helyettesítünk.
   a) Mekkora a hiba?
   b) Mekkora a relatív hiba a pontos értékhez viszonyítva?
   c) A közelítő értékhez viszonyítva?

2. Mekkora hibát követünk el, ha 7/9 közönséges törtet 0,78 tizedes törttel helyettesítjük? Mekkora a relatív hiba? Mekkora hibakorlátra következtet az olvasó, ha csak a közelítő értéket ismeri?
3. Adjuk meg $e = 2{,}7182818\ldots$ közelítő értékét $5 \cdot 10^{-5}$ pontossággal.
4. Adjuk meg e közelítő értékét tízezred (10^{-4}) pontossággal (más szóval: négy tizedesre pontosan).
5. Egy mérnöki zsebkönyvben lg e értékére a következő adatot találjuk: 0,43429. Milyen pontossággal értendő az adat?
6. Zsebkönyvünkben π értéke 3,1416-del van megadva. Mekkora a hibakorlát?
7. Számítsuk ki az előző feladatban megadott közelítő érték relatív hibájának korlátját (2 értékes jeggyel kifejezve).
8. Az 1941. évi népszámlálás időpontjában Budapest lakosainak száma 1 164 963 volt. A népességi statisztikában ez adatot 500-as pontossággal akarjuk megadni. Milyen lélekszámmal kell feltüntetni a főváros lakosságát? Mekkora a közelítő statisztikai adat hibája és relatív hibája? Mekkora hibakorlátra és relatív hibakorlátra következtet az olvasó, ha csak a közelítő adatot ismeri?
9. Budapest lakosainak száma 1949. január 1-én (egész ezresekre kerekítve) 1 571 000-ben volt megadva. Milyen határok közt volt a főváros lakosainak pontos lélekszáma?
10. A köztudatban a méter hosszegység a föld negyed hosszúsági körének tízmilliomod része. Pontosabb mérések szerint a negyed hosszúsági kör 10 002 130 m. Milyen hibával közelíti meg a köztudatban élő méter a valódi métert, és mekkora a relatív hiba?
11. A magyar méter etalon (országos méterrúd) hossza vízszintes helyzetben t *Celsius* fok hőmérsékleten

$$1 \text{ m} + (8{,}646\, t + 0{,}001\, t^2 - 1{,}3) \text{ mikron.}$$

A mikron (jele: μ) a méter milliomodrésze. Mekkora a hiba és a relatív hiba korlátja, ha az etalont 0 és 20 *Celsius* fok hőmérséklethatárok közt 1 m-rel egyenlőnek vesszük?
12. A geodéziai méréseknél használatos 20 m hosszú mérőszalagok rugóacélból készülnek. A rugóacél hőkiterjedési együtthatója: $1{,}2 \cdot 10^{-5}/\text{C}^\circ$. Mi az elkövetett hiba korlátja, ha 0° és 10° között a mérőszalag megnyúlását elhanyagoljuk?
13. A hajók sebességének mértékegysége a *csomó*. 1 csomó = 1 tengeri mérföld per óra. A tengeri mérföld az egyenlítői fok hatvanad része:

$$1 \text{ tengeri mérföld} = 1855{,}109\,64 \text{ m.}$$

Mekkora a hiba, ha a tengeri mérföldet 1855 méterrel vesszük egyenlőnek? Mekkora a relatív hiba?
14. A nálunk régebben használt hosszmértékegység

$$1 \text{ bécsi öl} = 1{,}896\,483\,840 \text{ m}$$

(*Struve* meghatározása, 1850). A közhasználat céljára hivatalosan (1907: V. tc.) megállapított bécsi öl = 1,896 48 m. Milyen hibával közelíti meg a hivatalos öl a *Struve* által meghatározott ölet? Számítsuk ki a relatív hibát is.
15. 1 angol hüvelyk (jele 1'') = 25,4 mm. Mekkora hibát követünk el, ha 1 m-t 39,37''-kel helyettesítünk?

16. Milyen hibával közelíti meg 57,3° a szögmérés radiánegységét? (π radián = = 180°.) Mekkora a relatív hiba?

17. *Celsius*-skála szerint beosztott hőmérőnkön 0,05° pontossággal olvasható le a hőmérséklet. A hőmérőn 38,2° hőmérsékletet olvasunk le. Becsüljük meg a hibá

a) *Celsius*,
b) *Reaumur*,
c) *Fahrenheit* szerint és
d) abszolút hőmérsékletben kifejezve.

18. 1000 Ft-nak kamatok kamatjával felnövekedett értékét 10 év alatt az alant táblázat tünteti fel,

a) ha a kamatokat félévenként tőkésítjük,
b) ha a kamatokat évenként tőkésítjük.

	2%	3%	4%	5%	6%
a)	1220,19	1346,86	1485,95	1638,62	1806,11
b)	1218,99	1343,92	1480,24	1628,89	1790,85

Mekkora a hiba és a relatív hiba, ha az *a)* alatti értékeket a *b)* alatti értékekkel helyettesítjük?

19. Mm papíron 1 : 1000 léptékben készült rajzról lemérünk 12,5 cm hosszú távolságot. A leolvasás pontossága 0,2 mm. Mekkora a természetben megfelelő távolság hibakorlátja és relatív hibájának korlátja?

20. Mekkora a hiba 10^{-5} pontossággal, ha $\sin x$ értékét a független változó ívmértékével helyettesítjük annak következő helyein: $\pi/35$, $\pi/20$, $\pi/10$. Mekkora a relatív hiba (két értékes jeggyel kifejezve)?

21. A szinusz függvény értékét a $(0;\ \pi/45)$ számközben az argumentum (ívmértékben kifejezett) értékével helyettesítjük. Határozzuk meg a hiba korlátját.

22. Mekkora hibát követünk el, ha a szabadon eső test sebességét

a) a hatodik mp kezdő időpontjában,
b) a hatodik mp végső időpontjában

a hatodik mp átlagos sebességével helyettesítjük? ($g = 980$ cm/sec^2).

23. Az 1 dm sugarú körbe szabályos hatszöget írunk. Becsüljük meg a hibát cm-ben, illetve cm^2-ben a hatszöghöz viszonyítva, ha

a) a kör kerületét a hatszög kerületével,
b) a kör területét a hatszög területével helyettesítjük.

24. 1949. január 1-én Magyarország férfilakossága 4 423 420
női lakossága 4 781 379
Összesen : 9 204 799.

Mekkora a hiba, ha a férfilakosság számát 48%-ban jelöljük meg? Mekkora hibakorlátra következtet az olvasó, aki csak az összlakosság számát és a 48%-ot ismeri?

25. A *Renard*-féle szabványos számsorozatok mértani sorozatok, amelyeknek hányadosa

$$q_{40} = 10^{1/40}$$
$$q_{20} = 10^{1/20}$$
$$q_{10} = 10^{1/10}$$
$$q_5 = 10^{1/5}$$

Gyakorlatban a következő közelítő értékeket használjuk:

$$q_{40} \approx 1{,}06$$
$$q_{20} \approx 1{,}12$$
$$q_{10} \approx 1{,}25$$
$$q_5 \approx 1{,}60$$

Számítsuk ki a relatív hibákat.

26. A normálfogazású fogaskerék „modulusa"

$$m = t/\pi,$$

ahol t az „osztást" jelenti mm-ben. A modulusok szabványosítva vannak.

Az osztókör ívén az osztást 6,42 mm-nek találjuk. Mekkora a relatív hiba, amelyet elkövetünk, ha a modulust 2-nek vesszük?

27. Angol hüvelykben ('') a fogaskerék jellemző adata nem a modulus, hanem a „diametral pitch", jele: D_p. Jelenti, hogy az osztókör átmérőjének minden angol hüvelyk hosszú darabjára hány fog jut.

A fogaskerék fogainak száma $z = 50$ és $D_p = 10$. Mekkora a relatív hiba, ha a modulus pontos értéke helyett a legközelebb eső szabványos modulust (2,5 mm) használjuk?

28. Négy tizedesre kiszámított függvénytáblázatban e^x értékére a következő számokat találjuk:

x	1	6
e^x	2,7183	403,4288

Mekkora a két adat relatív hibájának korlátja?

29. Függvénytáblázatunkban e^x értékei 5 értékes jegyre vannak megadva:

x	1	6
e^x	2,7183	403,43

Mekkora a két adat relatív hibájának korlátja?

30. A 4 jegyű (10 alapú) logaritmus táblázatból kikeressük lg 2 mantisszáját: 3010.

Becsüljük meg

$$\lg 2, \qquad \lg 20, \qquad \lg 2000$$

hibáját és relatív hibáját.

31. Számítsuk ki logarléccel (alaphosszúság 25 cm; a következő példákban is) $\sqrt{57{,}9}$ közelítő értékét. Határozzuk meg a hiba és a relatív hiba korlátját.

32. Számítsuk ki logarléccel az r és φ polárkoordinátáknak megfelelő x és y derékszögű koordinátákat. Határozzuk meg a hiba és a relatív hiba korlátját (szintén logarléccel).

r	6,50	7,54	5,36
φ	51,2°	241,3°	327,9°

33. Számítsuk ki

a) $\sqrt{27{,}3}$ *b)* $\sqrt{0{,}0684}$

c) $\sqrt[3]{6{,}15}$ *d)* $\sqrt[3]{442}$

közelítő értékét logarléccel, azután 4 jegyű logaritmustáblázattal. Határozzuk meg a hiba és a relatív hiba korlátját.

34.

$$10/9 = \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}1^k$$

konvergens sor összegét az

$$s_5 = 1{,}1111$$

ötödik részletösszeg értékével helyettesítjük. Határozzuk meg a hiba és a relatív hiba korlátját.

35.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k\,!$$

konvergens sor összegét az s_7 hetedik részletösszeggel közelítjük meg. Határozzuk meg a hiba és a relatív hiba egy korlátját.

36. Valamely lemez vastagságát mikrométerrel mérjük meg. A mérés pontossága 0,01 mm. Mekkora a relatív hiba korlátja, ha a lemez 1 mm vastag? ha a lemez 1 cm vastag?

37. A hidrogénatom tömege: $(1{,}673 \pm 0{,}001) \cdot 10^{-24}$ g,

az elektroné: $(9{,}11 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-28}$ g.

Mekkora a hibakorlát és a relatív hibakorlát a két mérésnél? Melyik mérést tekintjük megbízhatóbbnak?

38. Újabb mérési eredmények szerint a fény sebessége légüres térben

$$(299\,796 \pm 4) \text{ km/mp.}$$

Mekkora a relatív hiba korlátja?

Miért helytelen, ha a fény sebességét légüres térben durván 300 000 km/mp-nek jelöljük? Hogyan kell helyesen megadni?

39. A földi gyorsulás képlete (a tengerszín feletti h magasság függvényében)

$$g_h = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2},$$

ahol a gyorsulás h magasságban g_h

a tenger szintjén g_0

és R a föld középsugara.

A közelítő képlet ($h \ll R$)

$$g_h = g_0 \cdot \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

	$h = 1$ km	$h = 10$ km	$h = 20$ km
közelítő képlettel	980,69	977,92	974,84
pontos képlettel	980,69	977,93	974,87

Mekkora a relatív hiba?

40. Szögmérőnkkel 6″ pontossággal tudunk szöget mérni. Számítsuk ki $\sin\alpha$ értékét 7 tizedes jegyet tartalmazó logaritmustáblázattal, és becsüljük meg a hibát, ha a mérés eredménye

$$\alpha = 42° 20' 12'' \pm 6''.$$

41. $\frac{1}{1+x}$ értékét $(1-x)$-szel közelítjük meg. Bizonyítsuk be, hogy a relatív hiba korlátja

$$\begin{aligned} &0{,}1\%, \text{ ha } -0{,}03 \leqq x \leqq 0{,}03;\\ &1\ \%, \text{ ha } -0{,}1 \leqq x \leqq 0{,}1;\\ &9\ \%, \text{ ha } -0{,}3 \leqq x \leqq 0{,}3. \end{aligned}$$

42. $\sqrt{1+x}$ értékét $\left(1+\frac{x}{2}\right)$-vel közelítjük meg. Bizonyítsuk be, hogy a relatív hiba korlátja közelítőleg

$$\begin{aligned} &0{,}1\%, \text{ ha } -0{,}08 \leqq x \leqq 0{,}1;\\ &1\ \%, \text{ ha } -0{,}24 \leqq x \leqq 0{,}32;\\ &10\ \%, \text{ ha } -0{,}61 \leqq x \leqq 1{,}53. \end{aligned}$$

43. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ értékét $\left(1-\frac{x}{2}\right)$-vel közelítjük meg. Bizonyítsuk be, hogy a relatív hiba korlátja közelítőleg

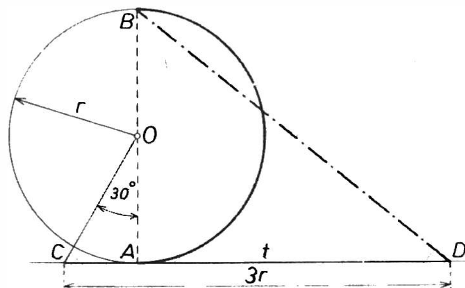
$$\begin{aligned} &0{,}1\%, \text{ ha } -0{,}04 \leqq x \leqq 0{,}06;\\ &1\ \%, \text{ ha } -0{,}15 \leqq x \leqq 0{,}17;\\ &10\ \%, \text{ ha } -0{,}45 \leqq x \leqq 0{,}53. \end{aligned}$$

44. $\sin x$ értékét x értékével közelítjük meg. Bizonyítsuk be, hogy a relatív hiba korlátja közelítőleg

$$\begin{aligned} &0{,}1\%, \text{ ha } -4{,}4° \leqq x \leqq 4{,}4°;\\ &1\ \%, \text{ ha } -14° \leqq x \leqq 14°;\\ &10\ \%, \text{ ha } -44° \leqq x \leqq 44°. \end{aligned}$$

45. $\operatorname{tg} x$ értékét x értékével közelítjük meg. Bizonyítsuk be, hogy a relatív hiba korlátja

$$\begin{aligned} &0{,}1\%, \text{ ha } -3{,}1° \leqq x \leqq 3{,}1°;\\ &1\ \%, \text{ ha } -10{,}5° \leqq x \leqq 10{,}5°;\\ &10\ \%, \text{ ha } -30° \leqq x \leqq 30°. \end{aligned}$$



1. ábra

46. Számítsuk ki a félkör „kiegyenesítésének" *Kohanszky*tól származó közelítő szerkesztésénél keletkező relatív hibát. (Ez a szerkesztés az 1670 körüli évekből származik.) A szerkesztés (1. ábra): A körhöz az A pontban érintőt húzunk (t). Az OA rádiuszhoz 30° alatt hajló OC egyenes és a t érintő C metszéspontjából a t érintőre (A felé) rámérjük a $CD = 3\,r$ hosszúságot. DB egyenesdarab a félkör közelítő hosszúsága.

b) Az adatok hibáinak befolyása az alapműveletek eredményére. Megszabott pontosságú műveletek

Ha az adatok csak közelítően pontosak, a műveletek eredménye is csak közelítően pontos. Az adatok hibájának és relatív hibájának korlátaiból következtethetünk az eredmény hibájának és relatív hibájának korlátjára.

α) Az összeg hibája

Az A és a B mennyiség

$$S = A + B$$

összegét az A mennyiség a
és a B mennyiség b
közelítő értékeiből számítjuk ki. Az összeg közelítő értéke

$$s = a + b.$$

Mekkora az s hibakorlátja: m_s, ha az a hibakorlátja m_a, és a b hibakorlátja m_b?

Minthogy

$$|A - a| \leqq m_a \qquad \text{és} \qquad |B - b| \leqq m_b,$$

az abszolút értékekre vonatkozó egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$|S - s| = |(A + B) - (a + b)| = |(A - a) + (B - b)| \leqq$$
$$\leqq |A - a| + |B - b| \leqq m_a + m_b.$$

Az összeg hibakorlátját megkapjuk, ha az összeadandók hibakorlátjait összeadjuk.

Megjegyzés. Ez a hibakorlát a legkedvezőtlenebb esetet veszi figyelembe. Az összeg hibája általában kisebb. Ha például az egyik összeadandó közelítő értéke többlettel, a másiké hiánnyal közelít, akkor a két hiba egymást részben vagy egészen lerontja.

Példák

1. Számítsuk ki az egyenlőszárú derékszögű háromszög kerületét, ha a befogók 1 m hosszúak. A megkívánt pontosság (hibakorlát) 1 mm.

A kerület $(2 + \sqrt{2})$ m. Minthogy az összeg hibakorlátjának 0,001 m-nek kell lennie, az első összeadandó pedig pontos (hibakorlátja = 0), a második összeadandó hibakorlátjának is 0,001 m-nek kell lennie. Ebből következik, hogy $\sqrt{2}$ értéket 3 tizedesre kell kiszámítani:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

A kerület mm pontossággal 3,414 m.

2. Számítsuk ki $\pi + \sqrt{2}$ közelítő értékét π és $\sqrt{2}$ közelítő értékeiből, amelyek $5 \cdot 10^{-3}$ pontossággal vannak megadva. Mekkora lesz az összeg hibakorlátja?

$$\pi \approx 3{,}14 \qquad |\pi - 3{,}14| \leqq 0{,}005$$
$$\sqrt{2} \approx 1{,}41 \qquad |\sqrt{2} - 1{,}41| \leqq 0{,}005$$
$$\pi + \sqrt{2} \approx 4{,}55 \qquad |\pi + \sqrt{2} - 4{,}55| \leqq 0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01.$$

Az összeg (= 4,55) hibakorlátja (= 0,01) a két összeadandó hibakorlátainak összege.

Több tag összegének hibakorlátját kéttagú összeg hibakorlátjának meghatározásához hasonlóan kapjuk meg:

az összes tagok hibakorlátait össze kell adni.

3. Fémhulladék súlyát kell lemérni. Mérlegünkkel egyszerre csak 5 kg-ot lehet mérni. Egy-egy mérés hibakorlátja 5 dkg. A hulladékból kétszer mérünk le 5—5 kg-ot és egyszer 3 kg-ot. Mekkora a hulladék tényleges súlya?

A hibakorlát $3 \cdot 5$ dkg $= 15$ dkg. A hulladék tényleges súlya

$$13 \text{ kg} \pm 15 \text{ dkg}.$$

Ha egy 10 tagú összeg minden tagjának külön-külön 0,005 a hibakorlátja, akkor az összeg hibakorlátja 0,05.

β) Megszabott pontosságú összeadás

A népszámlálás adatai szerint egy járás 10 községében a lakosok lélekszáma: 12 617, 9549, 7348, 5342, 4913, 3657, 3215, 2987, 2843, 2595. Mennyi a járás lakossága 500-as pontossággal?

A hibakorlát az összegben 500 legyen. Az egyes tagokban egyenként 50 lehet a hibakorlát. Az egyesek és tízesek tehát elhagyhatók a százasok kerekítésével.

	Pontos összeadás:	Rövidített összeadás:
1.	12 617	12 600
2.	9 549	9 500
3.	7 348	7 300
4.	5 342	5 300
5.	4 913	4 900
6.	3 657	3 700
7.	3 215	3 200
8.	2 987	3 000
9.	2 843	2 800
10.	2 595	2 600
	55 066 ($\approx$ 55 000)	54 900 ($\approx$ 55 000).

Szabály. Hogy a rövidített összeadást $5 \cdot 10^k$ pontossággal végezhessük el, ahol k pozitív vagy negatív egész számot jelent, az összeg tagjait nagyobb pontossággal kell ismerni, még pedig

ha a tagok száma:	akkor az egyes tagokban szükséges pontosság:
2— 10	$5 \cdot 10^{k-1}$
11— 100	$5 \cdot 10^{k-2}$
101—1000	$5 \cdot 10^{k-3}$

és így tovább.

γ) A tagok és az összeg relatív pontossága

Becsüljük az

$$s = a + b \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

összeg relatív pontosságát, ha az első tag relatív hibájának korlátja r_a, a másodiké r_b.

Jelöljük az összeg relatív hibájának korlátját r_s-sel.

$$r_a = \frac{m_a}{a}, \qquad r_b = \frac{m_b}{b},$$

$$r_s = \frac{m_s}{a+b} \leqq \frac{m_a + m_b}{a+b} = \frac{a \cdot r_a + b \cdot r_b}{a+b}.$$

Az összeg relatív hibájának korlátja a tagok relatív hibakorlátaiból képzett középérték (*a* és *b* pozitív súlyokkal), tehát nem haladja meg a tagok relatív hibái közül a nagyobbat.

Ugyanez a becslés érvényes több tag összegének relatív hibakorlátjára is. Míg tehát az összeg hibakorlátja egyenlő a tagok hibakorlátainak összegével, a relatív hiba korlátja nem nagyobb a tagok relatív hibái közül a legnagyobbnál.

A tíz járási község lakosságának és az összes lakosság (l. a *β)* adatait) példájában:

az összeadandók hibakorlátja egyenként	50
az összeg hibakorlátja	500.

Az összeadandók relatív hibáinak korlátja:

1. $\frac{50}{12\,600} \approx 0{,}004$; 6. $\frac{50}{3700} \approx 0{,}014$;

2. $\frac{50}{9500} \approx 0{,}005$; 7. $\frac{50}{3200} \approx 0{,}016$;

3. $\frac{50}{7300} \approx 0{,}007$; 8. $\frac{50}{3000} \approx 0{,}017$;

4. $\frac{50}{5300} \approx 0{,}009$; 9. $\frac{50}{2800} \approx 0{,}017$;

5. $\frac{50}{4900} \approx 0{,}010$; 10. $\frac{50}{2600} \approx 0{,}019$.

Az összeg relatív hibakorlátja $= \frac{500}{55\,000} \approx 0{,}009 < 0{,}019$.

δ) A különbség hibájának és relatív hibájának korlátja. Kivonás megszabott pontossággal

$$A - B = D$$

különbség közelítő értéke $a - b = d$.

Ha a kisebbítendő és kivonandó hibakorlátját ismét m_a-val és m_b-vel jelöljük, a különbségét pedig m_d-vel, akkor

$$|D - d| = |(A - a) - (B - b)| \leqq m_a + m_b,$$

$$m_d \leqq m_a + m_b.$$

A különbség hibakorlátja a kisebbítendő és a kivonandó hibakorlátainak összege. Ez abból a meggondolásból is világos, hogy a kivonásnál a hibák növelik egymást, ha ellenkező irányúak.

Példák

4. Egy cső külső átmérője 0,5 mm pontossággal mérve 12,5 cm, belső átmérője 0,5 mm pontossággal mérve 11,3 cm. Mekkora a cső vastagsága?

$12{,}5 - 11{,}3 = 1{,}2$ cm; hibakorlát $2 \cdot 0{,}5 = 1$ mm.

Míg az összeadásnál a relatív hiba korlátja kevésbé nő, mint az abszolút hibáé, a kivonásnál a relatív hiba lényegesen megnövekedhetik.

Ha ugyanis A és B egymástól kevéssel különböznek, a relatív hiba kifejezésében a nevező kicsivé válik, és a tört értéke nagyra nő.

5. A π közelítő értéke $5 \cdot 10^{-3}$ pontossággal 3,14; hibakorlát 0,005; a relatív hiba korlátja közelítőleg 1,6‰.

e közelítő értéke $5 \cdot 10^{-3}$ pontossággal 2,72; hibakorlát 0,005; a relatív hiba korlátja közelítőleg 1,8‰.

Becsüljük meg $\pi + e$ és $\pi - e$ hibáját és relatív hibáját.

$\pi + e \approx 5{,}86$, hibakorlát 0,01, a relatív hiba korlátja $<$ 1,8‰.

$\pi - e \approx 0{,}42$, hibakorlát 0,01, a relatív hiba korlátja $\frac{0{,}01}{0{,}42} \approx$ 24‰.

Míg tehát π és e összegében és különbségében egyaránt a második tizedes jegy helyén is még a helyes számjegy áll, addig az összeg relatív hibája nem nagyobb 1,8‰-nél, a különbségé pedig közel 24‰. Erről a kivonásnál nem szabad megfeledkezni, ha a feladatban a relatív hiba értéke fontos.

* * *

Pontos kivonás:	Megszabott pontosságú kivonás: (0,1 pontosság)
62,48756	62,5
− 13,19584	− 13,2
49,29172 ($\approx$ 49,3)	49,3

Ha a kivonásnál a megszabott pontosság 10^{-1}, akkor a kisebbítendőben és a kivonandóban az első tizedes helyén álló számjegyet kerekítjük, és a többit elhagyjuk. Ezek után a műveletet szabályosan elvégezzük.

e) Szorzat hibájának és relatív hibájának korlátja

$$A \cdot B = P \qquad (A > 0,\ B > 0)$$

szorzat közelítő értéke $a \cdot b = p$. $(a > 0,\ b > 0)$.

A szorzat hibakorlátját a következő becsléssel kapjuk:

$$|AB - ab| = |a(B-b) + b(A-a) + (A-a)(B-b)| \leq$$

$$\leq a \cdot m_b + b \cdot m_a + m_a \cdot m_b,$$

tehát

$$m_p \leq am_b + bm_a + m_am_b = ab(r_a + r_b + r_ar_b).$$

Ha pl. $m_a = m_b = 0{,}01$, akkor

$$m_p = (a + b)\,0{,}01 + 0{,}0001.$$

A relatív hiba korlátját egyszerű kiszámítani:

$$r_p = \frac{m_p}{p} \leqq \frac{am_b + bm_a + m_a m_b}{ab} = \frac{m_b}{b} + \frac{m_a}{a} + \frac{m_a m_b}{ab}$$

$$r_p \leqq r_a + r_b + r_a r_b.$$

Példák

6. A π-nek közelítő értéke 3,14; a hibakorlát 0,005, a relatív hiba korlátja közelítőleg 0,0016 ($1{,}6^0/_{00}$). Számítsuk ki a hiba korlátját és a relatív hiba korlátját, amellyel $3{,}14^2$ megközelíti π^2-et.

$$3{,}14^2 = 9{,}8596.$$

A hibakorlát $m_p = 3{,}14 \cdot 0{,}005 \cdot 2 + 0{,}005^2 = 0{,}031425 < 0{,}04.$

A relatív hiba korlátja $r_p = 0{,}0016 \cdot 2 + 0{,}0016^2 \approx 3{,}2^0/_{00}$.

Több tényező szorzatánál a hiba és a relatív hiba becslése bonyolulttá válik például három tényező szorzatánál ($p = a\,b\,c$):

$$m_p \leqq abc\,(r_a + r_b + r_c + r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b r_c)$$

és

$$r_p \leqq r_a + r_b + r_c + r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b r_c\,.$$

Ha azonban figyelembe vesszük, hogy két-két relatív hiba szorzata e szorzat tényezőihez viszonyítva kis szám, és ezért ezeket a szorzatokat elhanyagoljuk, akkor két tényező szorzásánál

$$m_{ab} \approx ab\,(r_a + r_b), \quad r_{ab} \approx r_a + r_b\,,$$

több tényező szorzásánál

$$m_{abc\ldots} \approx abc\ldots(r_a + r_b + r_c + \ldots)$$

$$r_{abc\ldots} \approx r_a + r_b + r_c + \ldots$$

7. A kör átmérője $d = 12{,}5$ cm (hibakorlát: 0,05 cm, relatív hiba kisebb, mint $4^0/_{00}$). Mekkora a kör területe? ($\pi = 3{,}14$, a hibakorlát 0,005, relatív hiba $< 1{,}6^0/_{00}$.)

A kör területe közelítőleg $\frac{d^2\pi}{4} = 122{,}65625$ cm^2. A terület hibakorlátja (a relatív hibák szorzatait elhanyagolva)

$$m_t \leqq \frac{d^2\pi}{4}(r_d + r_d + r_\pi) =$$

$$= 122{,}65625\,(0{,}004 + 0{,}004 + 0{,}0016) \approx 1{,}23 \text{ cm}^2.$$

A relatív hiba korlátja

$$r_t = r_d + r_d + r_\pi \approx 0{,}01 = 1\%.$$

Megjegyzés. Mivel a szorzat relatív hibájának korlátját a tényezők relatív hibáinak korlátjából egyszerűbb kiszámítani:

$$r_p \approx r_a + r_b,$$

célszerű előbb a szorzat relatív hibájának korlátját kiszámítani és abból az abszolút hiba korlátját,

$$m_p \approx p\,(r_a + r_b).$$

6) Szorzás megszabott pontossággal

A 7. példában a kör területét az átmérő és π közelítő értékéből 5 tizedesre kaptuk, holott a hibakorlát értéke arra figyelmeztet, hogy már az egyesek helyén álló számjegy is hibás lehet. A számításnak ez a pontossága tehát felesleges. Sok munkát takarítunk meg, ha már a szorzást magát is csak egész jegyekre pontosan végezzük.

A gyakorlatban kielégítő az alanti számpéldán bemutatott műveleti utasítás, ha a szorzás eredményét megszabott pontossággal akarjuk kiszámítani.

Számítsuk ki

$$45{,}8947 \cdot 145{,}684$$

szorzatot tizedrész pontossággal (hibakorlát 0,1).

1. lépés. Szorzónak a kevesebb számjegyből álló tényezőt választjuk, jelen példában bármelyiket, pl. a másodikat. A szorzandóban megjelöljük (valamilyen jellel vagy csak emlékezetben) azt a számjegyet, amely a megszabott pontosság helyértékét foglalja el (8).

2. lépés. A szorzó egyesét (5) a megjelölt számjegytől jobbra álló számjegy (9) alá írjuk. A szorzó többi számjegyét fordított sorrendben írjuk tőle jobbra és balra:

$$\begin{array}{r} 45{,}8947 \\ \underline{48\ 6541} \end{array}$$

3. lépés. A részszorzatokat megszabott pontossággal számítjuk ki. A részszorzatok pontossága az eredmény megszabott pontosságának tizedrésze legyen.

Tehát a szorzó egyesével (5) a szorzást a felette álló számjegyen kezdjük, de a tőle jobbra következő számjegy szorzatából „javítjuk", így:

5-ször 4 = 20, javítás 2 + 5-ször 9 = 47. A részszorzat kiszámítása ezután a szorzás ismert szabálya szerint folytatódik. (A javítást kerekítéssel kell kiszámítani, tehát pl. 28 nem 2, hanem 3 javítást ad.)

A részszorzatok utolsó jegyei egyenlő helyértékű számok, tehát egymás alá írandók.

4. lépés. A részszorzatok összeadásában az utolsó oszlop összegét nem írjuk le, hanem szintén csak javításra használjuk.

45,8947
48 6541

458947
183579
22947
2753
366
18

66861

Eredmény: 6686,1.

Megjegyzés. Tekintettel arra, hogy a hibakorlát becslésénél a legkedvezőtlenebb esetet vettük figyelembe, nem pedig a „valószínű" eseteket, a becslés durva. Ezért a gyakorlatban sokszor megelégszünk a kevesebb munkát okozó szabállyal: a szorzó egyesét (5) nem a megjelölt számjegytől jobbra álló számjegy (9) alá írjuk, hanem a megjelölt számjegy alá (8).

E szabály szerint a részletszorzatok összeadásában az utolsó oszlop összegét nem javításra használjuk:

45,8947
486 541

45 895
18 358
2 295
275
36
2

66 861

Az eredmény nem változott.

Példa

8. Számítsuk ki π^2 értékét 0,01 pontossággal.

31415
51413

9425
314
126
3
2

987

$\pi^2 \approx 9{,}87.$

A 7. példában a $d = 12{,}5 \pm 0{,}05$ cm átmérőjű kör területét számítottuk ki. Hogy az eredményben egész pontosságot érjünk el, a kör sugarának négyzetét 0,01 pontossággal számítjuk ki, és a másik tényezőt is ezzel a pontossággal vesszük figyelembe:

625	3906
526	413
37500	1172
1250	39
313	16
3906	123 cm².

η) Hányados hibájának és relatív hibájának korlátja

Jelentse

$$\frac{A}{B} = Q \qquad (A > 0,\ B > 0)$$

hányados közelítő értékét

$$\frac{a}{b} = q \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

Határozzuk meg a hányados hibakorlátját (m_q) és relatív hibájának korlátját (r_q) az osztandó és az osztó hibájának és relatív hibájának korlátaiból:

$$|Q - q| = \left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|(A-a)\,b - (B-b)\,a|}{Bb} \leqq \frac{am_b + bm_a}{Bb}$$

Ha b annyira megközelíti B értékét, hogy $\frac{b}{B}$ helyett megengedhető hibával írhatunk 1-et, akkor fenti egyenlőtlenségből következő becsléseket kapjuk a hányados hibájának és relatív hibájának korlátjára:

$$m_q = \frac{a}{b}\left\{r_b + \frac{b}{B} r_a\right\} \approx \frac{a}{b}\,(r_a + r_b),$$

$$r_q = \frac{m_q}{q} \approx r_a + r_b.$$

Az osztásnál a relatív hibakorlátok összeadódnak, maga a hibakorlát pedig a hányados közelítő értékének szorzata a relatív hibakorlátok összegével. A hibakorlát tehát erősen nő, ha a hányados nagy szám.

Megjegyzés. A számítás célszerű sorrendje ugyanaz, mint a szorzásnál: először a relatív hiba korlátját számítjuk ki, és azután az

$$m_q = q \cdot r_q$$

összefüggésből a hiba korlátját.

Példa

9. Számítsuk ki $\frac{141}{\sqrt{2}}$ hányados közelítő értékét, becsüljük meg annak hibáját és relatív hibáját, ha $\sqrt{2}$ közelítő értékét 1,41-nak vesszük (hibakorlát 0,005, relatív hiba = 3,5‰).

$$q \approx \frac{141}{1{,}41} = 100.$$

Relatív hiba

$$r_q \leqq 0 + 0{,}0035 = 3{,}5‰.$$

Hibakorlát

$$m_q = 100 \cdot 0{,}0035 = 0{,}35,$$

a nevező hibakorlátjának 70-szerese.

ϑ) Megszabott pontosságú osztás

Különösen az osztásnál jelent nagy időmegtakarítást, ha az osztandó és az osztó jegyeinek száma csökken. Ezért a rövidített műveletek között a rövidített osztás szolgálja leginkább a gazdaságosságot. Az osztás mechanizmusában már az osztandó és osztó legnagyobb helyértékű jegyei meghatározzák a hányados legnagyobb helyértékű számjegyét. Hogy 65 975-ben hányszor van meg 8123, megállapítható már abból, hogy 65-ben a 8 nyolcszor van meg. Ha tehát a hányados kisebb helyértékű számjegyei már nem érdekesek, akkor elég 65-öt osztani 8-cal.

Néha azonban ez az eljárás rossz eredményre vezet. Ha például 65 028-at kell osztani 8973-mal, a hányadosban az egész számok helyén nem 8 fog állni, pedig 65-ben a 8 megvan 8-szor. Ha 650-et osztjuk 89-cel, látjuk, hogy a hányadosban 7 a legnagyobb helyértékű számjegy. A hibakorlát vizsgálata megadja az útmutatást a megszabott pontosságú osztás helyes berendezésére.

Ha ugyanis 65 028-at kell osztani 8973-mal, és az osztandót és az osztót 65-re és 8-ra rövidítjük, az osztandó relatív hibája $< \frac{1}{65}$, az osztóé $< \frac{1}{8}$, a hányados hibakorlátja tehát kisebb ugyan mint $8\left(\frac{1}{65} + \frac{1}{8}\right) < 1{,}125$, de a hiba lehet 1-nél nagyobb. Ha azonban egy-egy jeggyel többet veszünk figyelembe az osztandóban is, az osztóban is, a relatív hibák

$$\frac{1}{650} \text{ és } \frac{1}{80}\text{-nál}$$

kisebbek, tehát a hányados hibakorlátja kisebb, mint

$$8\left(\frac{1}{650} + \frac{1}{80}\right) < 0{,}1125.$$

Ilyen meggondolásokkal *a megszabott pontosságú osztás* következő műveleti *szabálya* adódik:

Meghatározzuk:

1. A hányadosban mi lesz az első számjegy helyértéke (például 65 028 és 8973 hányadosában egyes).

2. A megszabott pontosságú osztásból származó hányados hány számjegyet fog tartalmazni. (A fenti példában a hányados két jegyet tartalmaz, ha a hányadosban az egy egész jegyen kívül egy tizedest követelünk.)

3. Az osztóban (balról jobbra) eggyel több értékes jegyet tartunk meg (példánkban hármat).

4. Az osztandóban annyi jegyet tartunk meg, hogy az osztást a rendes szabály szerint megkezdhessük — tekintet nélkül az esetleg szereplő tizedesvesszőkre. Példánkban

$$6502 : 897.$$

5. A hányados minden következő jegyének meghatározásánál nem a maradék jegyeit szaporítjuk, hanem az osztó jegyeit fogyasztjuk.

Megjegyzés. Minden következő részmaradék meghatározására az előző maradékból ki kell vonni a csonkított osztó szorzatát a hányados utolsó jegyével. Ennek a szorzatnak meghatározásánál az utoljára levágott számjegyet is szorozzuk, de belőle csak javítást veszünk. A hányados utolsó számjegyét felkerekítjük, ha az utolsó maradék az utoljára felhasznált osztó felét eléri. (L. a 10. példát.)

Példa

10. **Számítsuk ki a 65 028 : 8973 hányadost egy tizedes pontossággal. A hányadosban egy egész és egy tizedes jegy lesz, összesen kettő. Az osztóból megtartunk három jegyet.**

```
6 5 0 2 : 8 9 7 = 7,2
2 2 3
  4 4
```

Hibakorlát 0,1.

Az első részmaradékban (223) a csonkított osztó (89) megvan 2-szer. Szorozzuk 2-vel a levágott jegyet (7). A szorzat (14) javításul 1-et ad, amelyet 89 kétszereséhez hozzáadunk (179). A következő részmaradék tehát 44.

Számítsuk ki ugyanezt a hányadost a második tizedesig:

```
6 5 0 2 8 : 8 9 7 3 = 7,24
2 2 1 7
  4 2 2
    6 3
```

A hányados felkerekítendő 7,25-re, mert 63 több, mint 89 fele. Hibakorlát 0,01.

Mint a megszabott pontosságú szorzásnál is meg szoktunk elégedni a megjegyzésben[1] vázolt, kevesebb munkát igénylő szabállyal, amely a megkívánt pontosságot „valószínűleg" már biztosítja, a megszabott pontosságú osztást is megrövidíthetjük, ha az osztóban csak ugyanannyi jegyet tartunk meg, mint amennyiből a hányados áll.

[1] Lásd ζ alatt a 4. lépésben található „Megjegyzés"-t.

E szabály szerint a hányadost egy tizedesig kiszámítva

$$\begin{array}{l} 6\,5\,0 : 8\,9 = 7{,}3 \\ \;\;2\,7 \end{array}$$

Az eredmény utolsó jegye 1 egységgel eltér.

Feladatok

1. Számítsuk ki három tizedesre pontosan a $42{,}465 \cdot 0{,}538$ szorzatot.
2. Számítsuk ki a kijelölt műveletek végső eredményét három tizedesre pontosan:

$$0{,}2340 + 4{,}3758 + 15{,}3720 \cdot 0{,}3762.$$

3. Számítsuk ki a kijelölt műveletek végső eredményét két tizedesre pontosan:

$$3{,}1568 + 7{,}6530 \cdot 1{,}0075 + \frac{0{,}3749}{5{,}168}.$$

4. Milyen pontossággal számítható ki a

$$p(x) = 3{,}72 - 8{,}44\,x + 1{,}38x^2 - 2{,}13x^3$$

polinom helyettesítési értéke az $x = 1{,}74$ helyen, ha mind az együtthatók, mind az argumentum relatív hibakorlátja 1%?
5. Számítsuk ki mm-ben a következő hosszakat:

$$1{,}361'', \quad 9{,}26'' \quad 11{,}07''$$

(1" = 1 angol hüvelyk = 25,4 mm.)[2]
a) logarléccel,
b) 0,01 mm pontosságú szorzással.
c) Hány értékes számjegyet jelent a megszabott pontosság?
6. 13,25 km hosszú távolságot öt szakaszra kell beosztani, amelyeknek viszonya

$$2:3:5:7{,}5:10.$$

Mekkorák az egyes szakaszok (0,01 km pontossággal)? Csináljuk meg a próbát a szakaszok összeadásával.
7. Meghatározandó $12°\,35'$ ívmértéke (adva: $1' \approx 0{,}00029089$) teljes hibabecsléssel.
8. Megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 3{,}1\,x + 4{,}2\,y - 3{,}5 &= 0 \\ 1{,}2\,x - 3{,}5\,y + 2{,}2 &= 0. \end{aligned}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert determinánsokkal és az osztást végezzük 0,005 pontossággal.

[2] Az angol hosszmérték egysége az imperial standard yard, amelyet meghatároz egy bronzrúdon alkalmazott két jel távolsága 62 F° hőmérsékleten. A rudat Londonban a parlament épületében őrzik. Időközönként a méterrel összehasonlító méréseket végeznek. Az 1935-ben végzett összehasonlító mérés eredménye szerint

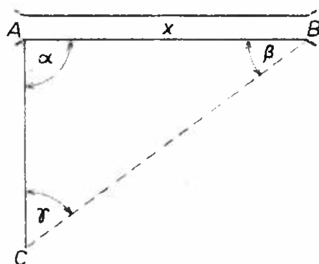
1" (egy angol hüvelyk) = 25,399 956 mm.

A magyar szabvány szerint 1 angol hüvelyk = 25,4 mm.

9. Számítsuk ki az ötjegyű 10 alapú logaritmustáblázatból ln 2 értékét. Becsüljük meg az elért pontosságot.

10. Számítsuk ki a hétjegyű 10 alapú logaritmustáblázatból ln 159 értékét. Becsüljük meg az elért pontosságot.

11. Az $\overline{AB}$ híd nyílásának hosszát a következő méréssel határozzuk meg. A folyó partján kitűzzük az $\overline{AC}$ alaptávolságot (2. ábra):



$$\overline{AC} = 200 \pm 0{,}01 \text{ m}.$$

Lemérjük a $BAC = \alpha = 90° \pm 1'$ és a $BCA = \gamma = 60° \pm 1'$ szögeket. Milyen pontossággal számíthatjuk ki ezekből az adatokból a hídnyílás x hosszát?

12. Meghatározandó az $m = 752{,}673 \pm 0{,}003$ *g* tömeg súlya. (Adva: $g = 980{,}852 \pm 0{,}001$ cm/mp².) Megbecsülendő a hiba.

13. Hány mm a barométerállás 1248 m magasságban, ha a tenger szintjén uralkodó $b_0 = 760$ mm, a h magasságban uralkodó b barométerállás és a h magasság között a kapcsolat:

$$h = 16\,000 \frac{b_0 - b}{b_0 + b}.$$

Megoldandó egész mm-ekre pontosan.

14. Az $l = 132{,}75 \pm 0{,}01$ cm hosszú inga lengésidejét $t = 1{,}152 \pm 0{,}002$ mp-nek mértük. Határozzuk meg a

$$g = \pi^2 \cdot l/t^2$$

képletből g értékét a mérés helyén.

15. Számítsuk ki az előbbi feladat eredményének relatív hibakorlátját 0,1‰ pontossággal a

$$\frac{\Delta l}{l} + \frac{2\,\Delta t}{t}$$

képlettel. (Δl és Δt jelentik az l és t mennyiségek hibakorlátját.)

16. A derékszögű hasáb élei

$$a = 20 \text{ cm} \pm 0{,}01 \text{ cm}$$
$$b = 25 \text{ cm} \pm 0{,}01 \text{ cm}$$
$$c = 50 \text{ cm} \pm 0{,}01 \text{ cm}.$$

Számítsuk ki a hasáb
a) F felszínét,
b) V térfogatát,

és becsüljük meg a számítás eredményének hibáját.

17. Számítsuk ki a háromszög t területét két oldalának és a közbezárt szögnek adataiból. Az adatok mérési eredményei:

$$a = 208{,}55 \text{ m} \pm 0{,}01 \text{ m}$$
$$b = 153{,}22 \text{ m} \pm 0{,}01 \text{ m}$$
$$\gamma = 52^\circ\, 36'\, 00'' \pm 10''.$$

Becsüljük a hibát.

18. A és B pontok h magasságkülönbségének kiszámítása:

$$h = t \cdot \operatorname{tg} \alpha + m - l.$$

Mérési adatok:

A vízszintes távolság: $t = 225{,}85 \text{ m} \pm 0{,}04 \text{ m}.$

Az eleváció szöge: $\alpha = 1^\circ\, 16'\, 20'' \pm 10''.$

A műszer magassága: $m = 0{,}875 \text{ m} \pm 0{,}005 \text{ m}.$

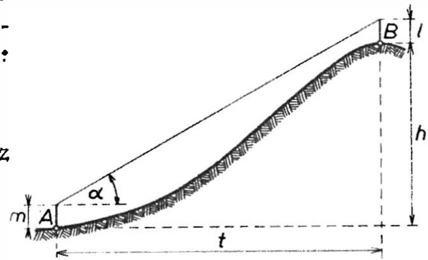
A mérőléc leolvasása: $l = 1{,}48 \text{ m} \pm 0{,}01 \text{ m}.$

Számítsuk ki h-t, és becsüljük a számítás eredményének hibáját (3. ábra).

19. Egy négyzet területének meghatározására megmértük az oldal hosszát. A terület értékét ebből a mérési adatból számítottuk ki:

$$t = a^2 = 1232 \text{ m}^2 \pm 15 \text{ m}^2.$$

Mit tudunk a mérés pontosságáról ebből az eredményből?



3. ábra

20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

konvergens sor összege $\frac{\pi^2}{12}$. Számítsuk ki $\frac{\pi^2}{12}$ közelítő értékét a felírt sor tizedik részletösszegéből. A maradéksor elhanyagolásából származó hiba kisebb, mint a tizenegyedik tag: $\frac{1}{11^2} < 0{,}0083.$

Milyen pontossággal kell az egyes tagokat a tizedik részletösszegben kiszámítani, hogy a közelítő érték a második tizedesre pontos legyen?

21. Számítsuk ki π közelítő értékét a

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

képletből az ún. trapézmódszerrel úgy, hogy a (0; 1) számközt 10 egyenlő részre osztjuk. A képletben előforduló alapműveleteket $5 \cdot 10^{-5}$ pontossággal végezzük. $\left(\text{A „képlethiba" kisebb, mint } \frac{1}{300}.\right)$ Becsüljük az eredmény teljes hibáját.

22. Oldjuk meg a 21. feladatot az ún. *Simpson*-módszerrel. (A részszakaszok hossza 0,1.) A képletben előforduló alapműveleteket $5 \cdot 10^{-7}$ pontossággal végezzük. (A „képlethiba" kisebb, mint 10^{-5}.) Becsüljük az eredmény teljes hibáját.

23. Számítsuk ki közelítőleg ln 2 értékét a

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

képletből a *Simpson*-módszerrel. (A részszakaszok hossza 0,1.) Az előforduló alapműveleteket $5 \cdot 10^{-7}$ pontossággal végezzük. (A képlethiba kisebb, mint $5 \cdot 10^{-6}$.)

24. Egy gömb alakú kondenzátor kapacitása

$$c = \frac{\varepsilon R r}{R - r}.$$

R és r jelentik a fegyverzetek külső és belső sugarát, ε az anyag dielektromos állandója
Mérések:

$$R = (5{,}27 \pm 0{,}01) \text{ cm},$$

$$r = (5{,}012 \pm 0{,}002) \text{ cm}.$$

Ítéljük meg a módszer megbízhatóságát.

25. Mekkora az R eredő ellenállás és becsüljük az eredmény hibáját, ha az

$$R_1 = 25{,}4 \pm 0{,}2\,\Omega \quad \text{és az} \quad R_2 = 17{,}9 \pm 0{,}1\,\Omega$$

ellenállásokat
a) sorosan,
b) párhuzamosan kapcsoljuk.

26. Érzékeny analitikus mérlegen kis higanycseppeket mérünk. A mérés módja: megmérjük valamely kis óraüveg súlyát, azután az óraüvegbe helyezzük a higanycseppet és újra megmérjük. A mérési eredmények:

óraüveg súlya üresen (6102,37 ± 0,05) mg,
óraüveg a higanycseppel (6109,21 ± 0,05) mg.

Ítéljük meg a módszer megbízhatóságát.

27. P kg erővel húzott l m hosszúságú és d mm átmérőjű acéldrót megnyúlása

$$\lambda = \frac{4 P l}{d^2 \pi E},$$

ahol $E = 2\,200\,000$ kg/cm² a rugalmassági modulus.

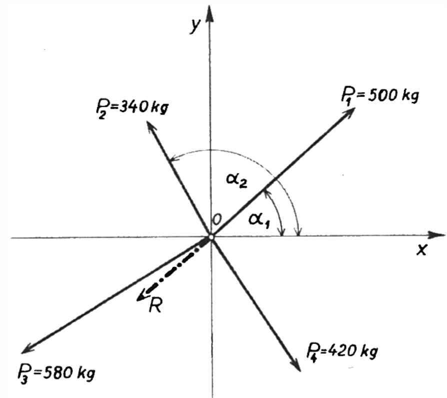
A dimenziókat mm-re és mm²-re átszámítva 4 tizedes pontossággal

$$\lambda = \frac{0{,}0579\, P l}{d^2} \text{ mm}.$$

Adatok: $P = 10$ kg, $l = 1$ m, $d = 1{,}32$ mm. Mekkora a megnyúlás 0,01 mm pontossággal?

28. A merev test 0 pontjában 4 erő támad. Az adatokat lásd a 4. ábrán és a következő táblázatban:

i	P_i	α_i
1	500 kg	42,3°
2	340 kg	118,1°
3	580 kg	212,4°
4	420 kg	302,5°



4. ábra

Kiszámítandó az R eredő erő nagysága és irányszöge. (Megszabott pontosság: az erő nagyságára 1 kg, a szögre 0,1°.)

29. Számítsuk ki a megmérendő l mennyiség x középértékét a következő hat mérésből:

52,1; 52,5; 52,1; 52,2; 52,2; 52,3.

Számítsuk ki a „megfigyelések m középhibáját" az

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} \qquad (v = x - l)$$

képletből, és az x középérték m_x középhibáját az

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

képletből. Megszabott pontosság 0,01.

Utasítás. A $v = x - l$ különbségek 4 tizedesre pontosan számítandók. Ellenőrzésül adjuk össze az eltéréseket 3 tizedesre pontosan. (Az összeg = 0.) Az eltérések négyzeteit 4 tizedesre pontosan számítjuk.

2. §. A POLINOM

a) Egyváltozós polinom értékének kiszámítása. Alkalmazások

A numerikus számítások szempontjából legegyszerűbbek azok a függvények, amelyeknek képletében csak a négy alapművelet szerepel. Ezek a racionális függvények. Alakjuk

$$\frac{p}{q},$$

ahol p és q polinomok.

Egyváltozós polinomnak nevezzük a

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \tag{2.1}$$

alakba rendezhető függvényt.

Az

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$$

együtthatók (koefficiensek) állandó (adott, rögzített) számok. Közöttük a nulla is előfordulhat.

x a változó: *a polinom argumentuma.*

n pozitív egész szám: *a polinom fokszáma* (feltéve, hogy $a_0 \neq 0$).

A (2.1) alakban a polinom az argumentum fogyó hatványai szerint van rendezve. Ugyanez a polinom rendezhető az argumentum növekedő hatványai szerint is:

$$p(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_2x^{n-2} + a_1x^{n-1} + a_0x^n.$$

Ebben a fejezetben olyan polinomokról van szó, amelyeknek argumentumai is, együtthatói is valós számok.

A műszaki feladatok közelítő megoldása szempontjából nem volna lényeges megszorítás, ha feltennők, hogy az argumentum és az együtthatók racionális számok. Minden valós szám ugyanis tetszőleges pontossággal közelíthető meg racionális számokkal. Az 1. §-ban megvizsgáltuk a racionális műveletek eredményének hibáját, ha azokat közelítő adatokból közelítő pontossággal számítjuk ki. Ez a hiba tetszőlegesen csökkenthető.

α) A polinomhoz tartozó Ruffini-sorozat

Így nevezzük a $p(x)$ polinomhoz tartozó következő sorozatot:

$$\left.\begin{aligned}
p(x) = p_0(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\
p_1(x) &= a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1} \\
p_2(x) &= a_0x^{n-2} + \dots + a_{n-3}x + a_{n-2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_{n-1}(x) &= a_0x + a_1 \\
p_n(x) &= a_0
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

A *Ruffini*-sorozat elemei között következő kapcsolat áll fenn:

$$p_k(x) = x\,p_{k+1}(x) + a_{n-k}\,. \tag{2.3}$$

A következő példa mutatja, hogy a (2.3) kapcsolatból a *Ruffini*-sorozat értékeit az argumentum valamely c helyén *alulról fölfelé haladva* hogyan számítjuk ki. Az utolsó lépésben magának a $p(x)$ polinomnak helyettesítési értékét kapjuk a c helyen.

Példa

1. Számítsuk ki a

$$p(x) = 2{,}38\,x^4 - 3{,}12\,x^3 - 5{,}45\,x^2 + 8{,}13\,x + 4{,}13$$

polinom helyettesítési értékét az $x = 1{,}2$ helyen.

k	$p_k(x)$	$1{,}2\,p_{k+1}\,(1{,}2)$	$p_k\,(1{,}2)$
0	$2{,}38\,x^4 - 3{,}12\,x^3 - 5{,}45\,x^2 + 8{,}13\,x + 4{,}13$	+ 1,451808	5,581808
1	$2{,}38\,x^3 - 3{,}12\,x^2 - 5{,}45\,x + 8{,}13$	− 6,92016	1,20984
2	$2{,}38\,x^2 - 3{,}12\,x - 5{,}45$	− 0,3168	− 5,7668
3	$2{,}38\,x - 3{,}12$	+ 2,856	− 0,264
4	$2{,}38$		2,38

↑

$p(1,2) = 5{,}581808$ $\qquad x = 1{,}2$

A számítás menetét a nyíl jelzi. Az utolsó oszlop utolsó sorában felírjuk p_4 (állandó) értékét, mely nem más, mint a polinom első együtthatója: 2,38. Ezt megszorozzuk a helyettesítendő számmal: 1,2. A szorzatot az utolsó előtti oszlopba írjuk p_3 sorába. A szorzathoz hozzáadjuk a polinom második együtthatóját (— 3,12), amelyet tőle közvetlenül balra látunk. Az eredmény a p_3 sorában az utolsó oszlopba kerül. Ahogyan a 4. sorból a 3. sort, ugyanúgy számítjuk ki a 3. sorból a 2. sort, és ebből az elsőt, végül a nulladikat. A nulladik sor utolsó oszlopában $p(x)$ helyettesítési értékét kaptuk az $x = 1{,}2$ helyen. Az eredmény kiszámításához négy szorzást kellett végeznünk — a szorzó mindig ugyanaz a szám: 1,2 — és négy összeadást. Ha a logarléc pontossága kielégítő, egyetlen beállítással gyorsan kapjuk az eredményt.

Közvetlen helyettesítéssel a polinom helyettesítési értékének kiszámítására három hatványozással több műveletet kellene végeznünk, és a szereplő szorzások is jóval több munkát adnának.

β) A Horner-elrendezés

A *Horner*-elrendezés a polinom helyettesítési értékének kiszámítására szolgáló praktikus elrendezés. Lényege, hogy a polinomhoz tartozó *Ruffini*-sorozat elemeit számítjuk ki, ahogyan azt az előző példában elvégeztük, de minden felesleges írás megtakarításával. Az elrendezést nem függőleges oszlopokban, hanem vízszintes sorokban szokás felírni. Az előbbi példa megoldása a *Horner*-elrendezésben:

	2,38	− 3,12	− 5,45	8,13	4,13
1,2		2,856	− 0,3168	− 6,92016	1,451808
	2,38	− 0,264	− 5,7668	1,20984	5,581808

A polinomot betű-együtthatókkal felírva a *Horner*-elrendezés szerkezete világosan mutatkozik:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

	a_0	a_1	a_2	$a_3 \ldots$	a_{n-1}	a_n
c		b_0c	b_1c		$b_{n-2}c$	$b_{n-1}c$
	$a_0 = b_0$	$b_0c + a_1 = b_1$	$b_1c + a_2 = b_2$	$\ldots$	$b_{n-2}c + a_{n-1} = b_{n-1}$	$b_{n-1}c + a_n = b_n$

(2.4)

$$b_n = p(c).$$

Fontos megjegyzés: A *Horner*-elrendezés felírásánál az együtthatók sorozatából nem szabad kihagyni a zérus értékű együtthatókat.

Példa

2. Számítsuk ki a *Horner*-elrendezéssel a

$$p(x) = x^5 - 5x^3 + 2$$

polinom értékét az $x = -2{,}5$ helyen.

	1	0	− 5	0	0	2
− 2,5		− 2,5	6,25	− 3,125	7,8125	− 19,53125
	1	− 2,5	1,25	− 3,125	7,8125	− 17,53125

γ) A Horner-elrendezés alkalmazása polinomok osztására

A (2.4) alatt betű-együtthatókkal felírt *Horner*-elrendezésből fontos azonosság vezethető le. Jelöljük $q(x)$-szel azt az $(n-1)$-edfokú polinomot, amelynek együtthatóit ennek az elrendezésnek a harmadik sorában számítottuk ki:

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}.$$

Akkor

$$p(x) = (x - c)\, q(x) + p(c). \qquad (2.5)$$

A *Horner*-elrendezés tehát megadja a $p(x)$ polinom és $(x - c)$ hányadosát: ez a hányados a $q(x)$ polinom, az osztás maradéka pedig $b_n = p(c)$.

Ha a maradék $b_n = 0$, akkor c a polinom zérushelye.

Példa

3. Osszuk el az $(x^5 - 5x^3 + 2)$ polinomot $(x + 2{,}5)$-del. Határozzuk meg a hányadost és a maradékot.

A 2. példában már felírtuk a vonatkozó *Horner*-elrendezést, amelyből

$$x^5 - 5x^3 + 2 = (x + 2{,}5)\,[x^4 - 2{,}5x^3 + 1{,}25x^2 - 3{,}125x + 7{,}8125] - 17{,}53125.$$

b) Polinomok differenciálhányadosainak kiszámítása a Horner-elrendezéssel

Differenciáljuk a (2.5) azonosság mindkét oldalát:

$$p'(x) = q(x) + (x - c)\, q'(x). \qquad (2.6)$$

Ha mindkét oldalon x helyébe c-t helyettesítünk, megkapjuk $p(x)$ differenciálhányadosát a c helyen kifejezve $q(x)$ helyettesítési értékével:

$$p'(c) = q(c).$$

Minthogy $q(x)$ együtthatóinak sorozata megegyezik a (2.4) *Horner*-elrendezés harmadik sorának számaival, miután az utolsót (b_n-et) elhagytuk, a $p'(c)$ differenciálhányados kiszámítására ismét a *Horner*-elrendezést alkalmazzuk a

$$b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$$

sorozatra.

1	0	− 5	0	0	2
− 2,5	− 2,5	6,25	− 3,125	7,8125	− 19,53125
1	− 2,5	1,25	− 3,125	7,8125	− 17,53125 = = p(− 2,5)

− 2,5	− 2,5	12,5	− 34,375	93,75
1	− 5	13,75	− 37,5	101,5625 = p'(−2,5).

A másodrendű differenciálhányados kiszámítására a (2.6) azonosság mindkét oldalát ismét differenciáljuk:

$$p''(x) = 2q'(x) + (x - c)\, q''(x). \qquad (2.7)$$

Ebből

$$p''(c) = 2q'(c).$$

Ahogyan a $p(x)$ együtthatóinak sorozatából a *Horner*-elrendezéssel kiszámítottuk $p'(c)$ értékét, úgy a $q(x)$ együtthatóinak sorozatából kiszámíthatjuk $q'(c)$, tehát a vele azonos $\frac{p''(c)}{2}$ értékét. A gondolatmenet és a *Horner*-elrendezésnek ismételt alkalmazásával rendre megkapjuk

$$p'(c),\ \frac{p''(c)}{2},\ \frac{p'''(c)}{3!},\ \ldots,\ \frac{p^{(n)}(c)}{n!}$$

értékeit. (Az utolsó elem megegyezik a $p(x)$ polinom a_0 együtthatójával.) Ennek bemutatására szolgál a 4. példa.

Példa

4. Számítsuk ki a

$$p(x) = x^5 - 5x^3 + 2$$

polinom differenciálhányadosait az $x = -2{,}5$ helyen.

	1	0	-5	0	0	2
$-2{,}5$		$-2{,}5$	6,25	$-3{,}125$	7,8125	$-19{,}53125$
	1	$-2{,}5$	1,25	$-3{,}125$	7,8125	$-17{,}53125 = p(-2{,}5)$
$-2{,}5$		$-2{,}5$	12,5	$-34{,}375$	93,75	
	1	-5	13,75	$-37{,}5$	$101{,}5625 = p'(-2{,}5)$	
$-2{,}5$		$-2{,}5$	18,75	$-81{,}25$		
	1	$-7{,}5$	32,5	$-118{,}75 = p''(-2{,}5):2!$		
$-2{,}5$		$-2{,}5$	25			
	1	-10	$57{,}5 = p'''(-2{,}5):3!$			
$-2{,}5$		$-2{,}5$				
	1	$-12{,}5 = p^{(4)}(-2{,}5):4!$				
	1	$= p^{(5)}(-2{,}5):5!$				

e) Polinomok átrendezése a Horner-elrendezéssel

Sokszor alkalmasabb a (2.1) alakban megadott polinomot a

$$p(x) = A_0(x-c)^n + A_1(x-c)^{n-1} + A_2(x-c)^{n-2} + \dots A_{n-1}(x-c) + A_n \quad (2.8)$$

alakra átrendezni, megadván a c helyet, amelyet a feladatban ki kell tüntetnünk. Ezt a (2.8) kifejezést nevezzük a polinom kifejtésének a c hely körül.

Minthogy a (2.1) és a (2.8) kifejezések ugyanazt a polinomot jelentik, differenciálhányadosaik is megegyeznek az argumentum bármely értékére. Ha a differenciálhányadosokat a két kifejezésből az $x = c$ helyen számítjuk ki, a (2.8) együtthatóira a következő meghatározásokat kapjuk:

$$A_0 = \frac{p^{(n)}(c)}{n!}, \quad A_1 = \frac{p^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}, \quad A_2 = \frac{p^{(n-2)}(c)}{(n-2)!}, \dots,$$

$$A_{n-1} = \frac{p'(c)}{1!}, \quad A_n = p(c).$$

Ezek a számok éppen a *Horner*-elrendezés n-szeri alkalmazásával nyerhetők a (2.1) kifejezésből.

Példa

5. Rendezzük át a

$$p(x) = x^5 - 5x^3 + 2$$

polinomot $(x + 2{,}5)$ fogyó hatványai szerint.

A 4. példában már kiszámítottuk a *Horner*-elrendezés ismételt alkalmazásával az átrendezett polinom együtthatóit:

$$p(x) = (x + 2{,}5)^5 - 12{,}5\,(x + 2{,}5)^4 + 57{,}5\,(x + 2{,}5)^3 - 118{,}75\,(x + 2{,}5)^2 +$$
$$+ 101{,}5625\,(x + 2{,}5) - 17{,}53125.$$

ζ) Polinomok helyettesítési értékének fokozatos kiszámítása átrendezéssel

Az eljárást példán mutatjuk be.

Példa

6. Számítsuk ki a

$$p(x) = x^5 - 5\,x^3 + 2$$

polinom helyettesítési értékét az $x = -2{,}53$ helyen.

A polinom helyettesítési értéke a $-2{,}5$ helyen (l. a 2. példát)

$$p(-2{,}5) = -17{,}53125.$$

Rendezzük át a polinomot $(x + 2{,}5)$ hatványai szerint (l. az 5. példát). Írjunk rövidség kedvéért $x + 2{,}5$ helyébe y-t:

$$y = x + 2{,}5.$$

Az átrendezett polinom:

$$y^5 - 12{,}5\,y^4 + 57{,}5\,y^3 - 118{,}75\,y^2 + 101{,}5625\,y - 17{,}53125.$$

Számítsuk ki ennek a polinomnak az értékét *Horner* elrendezésével az

$$y = -0{,}03$$

helyen, vagyis az

$$x = y - 2{,}5 = -2{,}53$$

helyen.

	1	− 12,5	57,5	− 118,75	101,5625	− 17,53125
− 0,03		− 0,03	0,3759	− 1,736277	3,61468831	− 3,1553156493
	1	− 12,53	57,8759	− 120,486277	105,17718831	− 20,6865656493

Az eredmény 10 tizedes jegyet tartalmaz. Kiszámítása nem igényel túlzottan sok időt és fáradságot. Ha azonban az eredmény pontossága előre meg van szabva, pl. 10^{-2}-ben, akkor a számítási munkában lényeges megtakarítás érhető el. A fárasztó hibabecslés helyett a gyakorlatban sokszor megelégszünk annyi óvatossággal, hogy a részletszámításokat eggyel több tizedesre számítjuk, tehát az adott esetben három tizedesre.

Ismételjük így a számítást. Az átrendezés műveletét nem ismételjük, mert abban csak a két utolsó oszlop kiszámítása nyújt — jelentéktelen — előnyt.

	1	− 12,5	57,5	− 118,75	101,563	− 17,532
− 0,03		− 0,03	0,376	− 1,736	3,614	− 3,155
	1	− 12,53	57,876	− 120,486	105,177	− 20,687

$$p(-2{,}53) \approx -20{,}69.$$

b) Polinomok zérushelyeinek kiszámítása[1]

α) Polinomokra vonatkozó tételek

Az algebrai analízis tankönyveiben megtaláljuk a következő *tételek* bizonyítását.

A polinomok az egész reális számtartományban értelmezett és mindenütt folytonos függvények. Ezért a $p(x)$ polinomnak az $[a, b]$ számtartományban páratlan számú zérushelye van, ha helyettesítési értékei a tartomány két határán ellenkező előjelűek.

A zérushelyek számát azok többszörösségének figyelembevételével kell meghatározni. A c zérushely k-szoros — k pozitív egész szám —, ha fennáll a

$$p(x) = (x - c)^k \cdot q(x)$$

azonosság, és $q(x)$ olyan polinom, amelynek c nem zérushelye.

I°. Descartes jelszabálya

Valamely polinom pozitív zérushelyeinek száma nem lehet nagyobb, mint a polinom együtthatóinak sorozatában fellépő jelváltások száma. A jelváltások száma és a pozitív zérushelyek száma közötti különbség (nulla vagy) páros szám.

Descartes jelszabályából következik, hogy az olyan polinomnak, amelynek együttható-sorozatában egyetlen jelváltás van, van pozitív gyöke.

II°. A zérushelyek alsó és felső korlátja

1'. *Newton* tétele a zérushelyek felső korlátjáról

Ha a K helyen az

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots$$

sorozat minden eleme egyenlő előjelű, akkor K felső korlátja az $f(x)$ zérushelyeinek.

2'. *Laguerre* tétele a zérushelyek felső korlátjáról.[2]

Ha a K helyen a *Ruffini*-sorozat:

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots$$

minden eleme egyenlő előjelű, akkor K felső korlátja az $f(x)$ függvény zérushelyeinek.

3'. Jelentse a

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

polinom együtthatói között

a_N az első negatív együtthatót,

a_m a legkisebbet a negatív együtthatók közül (vagyis azt, amelynek abszolút értéke a legnagyobb).

Akkor a $p(x)$ zérushelyeinek egy felső korlátja:

$$1 - \frac{a_m}{a_0} \qquad \textit{(Mac—Laurin szabálya),}$$

[1] A negyedik paragrafus tárgya az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeinek közelítő meghatározása. Az ott leírt eljárások akkor is alkalmazhatók, ha $f(x)$ polinom. Ebben a fejezetben csak a speciálisan polinomokra alkalmazható eljárásokat tárgyaljuk.

[2] *Newton* és *Laguerre* tételei lényegben azonos tartalmúak, és mindkettő *Descartes* jelszabályából következik.

vagy

$$1+\sqrt[N]{\frac{-a_m}{a_0}} \qquad \textit{(Lagrange szabálya)}$$

A fenti tételeket $p(-x)$ polinomra alkalmazva

a *Descartes*-jelszabály a negatív zérushelyek számáról,

a *Newton-*, *Laguerre-* és a következő tételek a zérushelyek alsó korlátjáról adnak felvilágosítást.

Példák

7. Bizonyítsuk be, hogy a

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 5$$

polinomnak egy pozitív zérushelye van.

Az állítás a *Descartes*-jelszabályból következik, mert az együtthatók sorozatában egyetlen jelváltás szerepel.

8. Határozzuk meg a

$$p(x) = x^5 - 2x + 0{,}5$$

polinom pozitív zérushelyeinek számát. Az együtthatók sorozatában

$$1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -2,\ 0{,}5$$

két jelváltás van, tehát a pozitív gyökök száma 0 vagy 2.

A derivált polinom

$$p'(x) = 5x^4 - 2,$$

melynek egyetlen pozitív zérushelye $c = \sqrt[4]{0{,}4} \approx 0{,}8$.

A derivált polinom a $[0, c]$ számközben negatív, a $[c, +\infty]$ számközben pozitív, tehát maga a $p(x)$ polinom a $[0, c]$ számközben monoton fogy, a $[c, +\infty]$ számközben monoton nő.

Mivel

$$p(0) = 0{,}5 > 0,$$

$\sqrt[4]{0{,}4}$ közelében fekvő $x = 1$ helyen

$$p(1) = -0{,}5 < 0$$

és az argumentum nagy értékeire, pl. már $x = 10$ helyen

$$p(10) > 0,$$

a $p(x)$ polinomnak két zérushelye van, egyik a $[0, 1]$ számközben, másik az $[1, 10]$ számközben.

9. Határozzuk meg a

$$p(x) = 2x^4 + 4x^3 - 59x^2 - 61x + 40$$

polinom valós zérushelyeinek számát, továbbá számközöket, melyek ezeket a zérushelyeket tartalmazzák.

Descartes jelszabályából következik, hogy a polinom pozitív zérushelyeinek száma 0 vagy 2; a negatív zérushelyek száma szintén 0 vagy 2.

Mivel

$$p(0) > 0 \quad \text{és} \quad p(1) < 0,$$

a $[0, 1]$ számközben van egy zérushely. Kell tehát, hogy a polinomnak még egy pozitív zérushelye legyen, amely 1-nél nagyobb. A pozitív zérushelyek egy felső korlátja a *Lagrange*-kritérium szerint

$$1 + \sqrt{\frac{61}{2}} < 7.$$

A *Horner*-elrendezéssel kiszámítjuk a $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, $p(5)$ helyettesítési értékeket:

$$p(4) < 0 \quad \text{és} \quad p(5) > 0.$$

A második pozitív gyök tehát a $[4, 5]$ számközben van.

A *Horner*-elrendezéssel kiszámítjuk a $p(-1)$ és $p(-2)$ helyettesítési értékeket:

$$p(-1) > 0 \quad \text{és} \quad p(-2) < 0.$$

A polinomnak tehát van egy negatív zérushelye a $[-2, -1]$ számközben. Van tehát még egy negatív zérushelye is, amely (-2)-nél kisebb.

A *Horner*-elrendezéssel kiszámítjuk, hogy

$$p(-6) > 0 \quad \text{és} \quad p(-5) < 0,$$

tehát a másik negatív gyök a $[-6, -5]$ számközben van.

β) Polinomok zérushelyeinek közelítő kiszámítása a Horner-elrendezéssel[3]

Írjuk fel a (2.5) azonosságot a $p(x)$ polinomra az $x = p$ helyen:

$$p(x) = (x - a)\,q(x) + p(a). \qquad (2.9)$$

Ismételjük az azonosságot a $q(x)$ polinomra:

$$q(x) = (x - a)\,r(x) + q(a).$$

Ha $p(x)$ fokszáma n,
akkor $q(x)$ fokszáma $n - 1$,
és $r(x)$ fokszáma $n - 2$.

A két azonosságból kapjuk, hogy

$$p(x) = (x - a)^2 \cdot r(x) + (x - a) \cdot q(a) + p(a). \qquad (2.10)$$

Legyen a $p(x)$ polinom az $[a, b]$ számköz két végpontján ellenkező előjelű, és legyen a számközben egyetlen zérushelye, amelyet c-vel jelölünk.

A (2.9) azonosságból következik, hogy $q(c) \neq 0$, tehát — ha az $[a, b]$ számköz elég kicsiny — $q(x)$ előjele az egész számközben állandó.

[3] E feladatgyűjtemény negyedik paragrafusában az olvasó más módszerekkel is meg fog ismerkedni, amelyek használatosabbak, mert általában gyorsabban vezetnek eredményhez.

A (2.10) azonosságból következik, hogy

$$c = a - \frac{p(a)}{q(a)} - (c-a)^2 \frac{r(c)}{q(a)} .$$

Tegyük fel, hogy az $[a, b]$ számközben az $r(x)$ polinom állandó előjelű és előjele megegyezik $p(a)$ előjelével. Akkor belátható, hogy az

$$a_1 = a - \frac{p(a)}{q(a)}$$

szám az $[a, c]$ számköz belső pontja.

Ha pedig az eljárást ismételve megalkotjuk az

$$a_{n+1} = a_n - \frac{p(a_n)}{q(a_n)}$$

sorozatot, ez konvergens, és határértéke a c zérushely.

Példa

10. Számítsuk ki közelítőleg a

$$p(x) = x^5 - 5x^3 + 2$$

polinom legkisebb pozitív gyökét.

A polinomnak keresett gyöke a $[0, 1]$ számközben van:

$$p(0) = 2; \quad p(1) = -2.$$

Minthogy

$$p'(x) = 5x^2(x^2 - 3)$$

az egész számközben negatív, $p(x)$ monoton fogy, és csak egy zérushelye lehet.

A *Horner*-elrendezéssel kiszámítjuk $p(x)$ és $r(x)$ polinomokat az $x = 1$ helyen:

	1	0	−5	0	0	2
1		1	1	−4	−4	−4
	1	1	−4	−4	−4	−2
1		1	2	−2	−6	
	1	2	−2	−6	−10	

$$q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 4$$

$$r(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 6 = x^2(x-2) + 6(x^2 - 3).$$

Szemmel látható, hogy $r(x)$ az egész $[0, 1]$ számközben negatív, tehát előjele megegyezik $p(1)$ előjelével.

Kiinduló közelítő értéknek tehát a $[0, 1]$ számköz jobboldali végpontját kell választani:

$$a = 1.$$

$$a_1 = 1 - \frac{p(1)}{q(1)} = 0{,}8.$$

A következő lépésben két tizedesre pontosan számolunk:

	1	0	− 5	0	0	2
0,8		0,8	0,64	− 3,49	− 2,79	− 2,23
	1	0,8	− 4,36	− 3,49	− 2,79	− 0,23
0,8		0,8	1,28	− 2,46	− 4,76	
	1	1,6	− 3,08	− 5,95	− 7,55	

$$a_2 = 0{,}8 - \frac{-0{,}23}{-7{,}55} \approx 0{,}8 - 0{,}03 = 0{,}77.$$

A harmadik lépésben 3 tizedesre pontosan számolunk:

	1	0	− 5	0	0	2
0,77		0,77	0,593	− 3,393	− 2,613	− 2,012
	1	0,77	− 4,407	− 3,393	− 2,613	− 0,012
0,77		0,77	1,186	− 2,480	− 4,522	
	1	1,54	− 3,221	− 5,873	− 7,135	

$$a_3 = 0{,}77 - \frac{-0{,}012}{-7{,}135} \approx 0{,}77 - 0{,}0017 = 0{,}7683.$$

A hiba becslését a műszaki gyakorlatban ritkán végezzük el, inkább egy újabb lépésben vizsgáljuk, hogy mely tizedesek maradnak már változatlanok.

A hibabecslés módszereire a következő fejezetben rátérünk.

γ) Polinomok zérus helyeinek közelítő meghatározása a Lobacsevszkij—Graeffe-módszerrel[4]

A módszer alapelve, hogy a $p(x)$ polinomból előállítjuk a

$$p_1(z),\ p_2(t), \ldots$$

polinomok sorozatát. Mindegyiknek zérushelyei a megelőző polinom zérushelyeinek négyzetei. Elég nagy számú lépés után olyan

$$p_k(u)$$

polinomhoz jutunk, amelynek zérushelyeit lineáris egyenletekből közelítőleg meg tudjuk határozni. Ezekből az eredeti $p(x)$ polinom zérushelyeinek abszolút értékét gyökvonással lehet kiszámítani. A gyökkitevő 2^k:

$$|x_i| = u_i^{2^{-k}}.$$

Az érdeklődő olvassa el *Rényi—Turán* dolgozatát: On the zeros of polynomials (Acta Math. Academiae Scient. Hung. Tom. III., Fasc. 4., 1952).

A módszer előnye, hogy azzal — ha alkalmazhatóságának feltételei teljesülnek — a polinom valamennyi zérushelyét egyszerre lehet megállapítani.

A módszer könnyen követhető, ha az eredeti egyenletet betű-együtthatókkal írjuk fel. (Az együtthatók reális számok.) Jelöljük a

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

polinom zérushelyeit az

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

indexes betűkkel.[5]

$p(x)$ előállítható a gyöktényezők szorzataként:

$$p(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Helyettesítsük ebben az azonosságban x-et $(- x)$-szel, és szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(- 1)^n$-nel:

$$(- 1)^n p(- x) = a_0 (x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_n).$$

A két azonosságból kapjuk e harmadikat:

$$(- 1)^n \cdot p(x) \cdot p(- x) = a_0^2 (x^2 - x_1^2) \cdot (x^2 - x_2^2) \ldots (x^2 - x_n^2).$$

Ebben a szorzatban x páratlan kitevőjű hatványainak együtthatói nullával egyenlők, mert a szorzat páros függvény. A páros kitevőjű hatványok együtthatóit

$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$$

-nel jelölve

$$(- 1)^n \cdot p(x) \cdot p(- x) = b_0x^{2n} + b_1x^{2n-2} + \ldots, + b_n.$$

E szorzat fokszáma n-re csökken, ha x^2 helyébe z-t írunk:

$$(- 1)^n \cdot p(x) \cdot p(- x) = b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n = p_1(z).$$

A módszer első lépését ezzel megtettük: előállítottuk a

$$p_1(z)$$

polinomot, amelynek gyökei az eredeti polinom zérushelyeinek négyzetei.

Ha az eredeti polinom zérushelyeinek abszolút értékei különbözők, pl.

$$| x_1 | > | x_2 |,$$

akkor a $p_1(z)$ polinom megfelelő gyökeire is fennáll, hogy

$$| z_1 | > | z_2 |.$$

Fennáll továbbá, hogy

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{x_1}{x_2} \right|^2 > \left| \frac{x_1}{x_2} \right| > 1 .$$

[5] A zérushelyek lehetnek komplex számok is. Mivel az együtthatók valós számok, minden komplex zérushellyel együtt konjugáltja is zérushely.

Ha továbbá $|x_1| > 1$, akkor még az is igaz, hogy

$$|z_1| - |z_2| = \{|x_1| + |x_2|\} \cdot \{|x_1| - |x_2|\} > |x_1| - |x_2|.$$

A

$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$$

együtthatók kiszámításának technikáját — $p(x)$ és $(-1)^n \cdot p(-x)$ polinomok szorzását — a következő elrendezés mutatja:

a_0^2	$-a_1^2$	a_2^2	$-a_3^2$	$\ldots \pm$	a_{n-1}^2	$\mp a_n^2$
	$2a_0a_2$	$-2a_1a_3$	$2a_2a_4$	$\ldots \mp$	$2a_{n-2}a_n$	
		$2a_0a_4$	$-2a_1a_5$	$\ldots$		
			$2a_0a_6$			
b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-1}	b_n

A b együtthatók a felettük álló oszlopok összegei.

Példa

11. $p(x) = 2x^6 - 3x^5 + 9x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x + 3 = 0$. Ebből a $p_1(z)$ polinom együtthatóit a fenti séma szerint számítjuk ki:

4	−9	81	−64	25	−4	9
	36	−48	90	−32	30	
		20	−12	54		
			12			
4	27	53	26	47	26	9

$$p_1(z) = 4z^6 + 27z^5 + 53z^4 + 26z^3 + 47z^2 + 26z + 9 = 0.$$

Megjegyzés: A példában szereplő polinomnak nincs valós zérushelye, mert valós szám négyzete pozitív, és ennek a négyzetnek ki kellene elégítenie a $p_1(z) = 0$ egyenletet. Utóbbi egyenletnek azonban minden együtthatója pozitív szám, tehát pozitív számot helyettesítve z helyére nem kaphatunk nullát.

Mint ahogyan fenti példában a $p_1(z) = 0$ egyenlet együtthatóiból — további számítás nélkül — el tudtuk dönteni, hogy az eredeti $p(x)$ polinomnak nincs valós zérushelye, sokszor más esetekben is tudunk következtetni a

$$p_1(z)$$

$$p_2(t) \quad \text{stb.}$$

polinomok együtthatóiból az eredeti $p(x)$ polinom zérushelyeinek természetére. A $p_1(z) = 0$ egyenlet gyökei:

$$x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2.$$

Ezekből a $p_1(z) = 0$ egyenlet együtthatóit a következő képletek határozzák meg:

$$\begin{aligned} \sum x_i^2 &= -\frac{b_1}{b_0} \\ \sum x_i^2 x_j^2 &= +\frac{b_2}{b_0} \\ \sum x_i^2 x_j^2 x_k^2 &= -\frac{b_3}{b_0} \\ &\ldots\ldots \\ \sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 \ldots x_n^2 &= \pm\frac{b_n}{b_0} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ha a $p(x) = 0$ egyenlet minden gyöke valós, tehát a $p_1(z) = 0$ egyenlet minden gyöke pozitív, az utóbbi egyenlet együtthatóinak sorozatában n jelváltásnak kell lennie. Egyetlen jelkövetkezésből, vagy ha csak egyetlen együttható nulla, már következik, hogy az eredeti egyenletnek van komplex gyöke is.

Legyen x_1 abszolút értéke nagyobb a többi gyök abszolút értékénél. Akkor

$$x_i^{2^k} : x_1^{2^k} \tag{2.12}$$

nullához tart, ha k minden határon túl nő. Legyen k olyan nagy szám, hogy a (2.12) hányados a nullát (megszabott) ε pontossággal megközelíti. Akkor k lépés után olyan

$$p_k(u) = A_0 u^n + A_1 u^{n-1} + \ldots + A_n = 0 \tag{2.13}$$

egyenlethez jutunk, amelynek gyökeiből alkotott (2.12) hányados nullát megszabott ε pontossággal megközelíti.

Alkalmazzuk a (2.11) egyenletek közül az elsőt a (2.13) egyenlet gyökeire:

$$1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{2^k} + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{2^k} = -\frac{A_1}{A_0 \cdot x_1^{2^k}}.$$

A baloldal 1-től tetszőlegesen kevéssel különbözik, tehát $x_1^{2^k}$ közelítőleg eleget tesz az

$$A_0 u + A_1 = 0$$

lineáris egyenletnek. Ebből következik, hogy

$$|x_1| \approx \left(-\frac{A_1}{A_0}\right)^{2^{-k}}.$$

A helyes előjelet úgy döntjük el, hogy x_1-et és $(-x_1)$-et vagy egy közelítő értéküket behelyettesítjük az eredeti egyenletbe. Még egy kérdést kell eldönteni. Hogyan ítéljük meg, hogy az x_1 gyök megközelítését a közbenső számítások pontosságának fokozása nélkül, pusztán a lépések ismétlésével már tovább nem javíthatjuk, tehát a lépéseket ismételni már nem érdemes? Ezt a kérdést a *Graeffe*-sorozatban egymás

után következő egyenletek összehasonlításával döntjük el. Ha ugyanis a következő lépés a

$$p_{k+1}(v) = B_0\, v^n + B_1\, v^{n-1} + \ldots + B_n = 0$$

egyenletre vezet, akkor

$$x_1^{2^{k+1}} \approx -\frac{B_1}{B_0}.$$

Mivel pedig

$$x_1^{2^k} \approx -\frac{A_1}{A_0},$$

tehát a következő lépésben olyan $-B_1 : B_0$ hányadost kell kapnunk, amely nem, vagy csak alig különbözik a $-A_1 : A_0$ hányados négyzetétől. Példa

$$p(x) = x^3 + 2\,x^2 - 13\,x + 10 = 0,$$

$$p_1(z) = z^3 - 30\,z^2 + 129\,z - 100 = 0 \qquad (z = x^2).$$

A következő lépésekben az együtthatók gyorsan sokjegyű számokra növekszenek. Ezért célszerű azokat pl. három értékes jeggyel közelítve 10 hatványaival kifejezni:

$$p_2(t) = t^3 - 6{,}42 \cdot 10^2\, t^2 - 1{,}06 \cdot 10^4\, t - 10^4 = 0 \qquad (t = x^4).$$
$$p_3(u) = u^3 - 3{,}89 \cdot 10^5\, u^2 + 0{,}99 \cdot 10^8\, u - 10^8 = 0 \qquad (u = x^8).$$
$$p_4(v) = v^3 - 15{,}1 \cdot 10^{10}\, v^2 + 0{,}97 \cdot 10^{16}\, v - 10^{16} = 0 \qquad (v = x^{16}).$$

Ennél a lépésnél már megállhatunk, mert $3{,}89 \cdot 10^5$ négyzete közelítőleg egyenlő $15{,}1 \cdot 10^{10}$-nel. Tehát

$$x_1^{16} \approx 15{,}1 \cdot 10^{10}$$

$$|x_1| \approx 4{,}997.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy $x = -5$ az eredeti egyenletnek gyöke. (A gyök előjele negatív.)

Ha a következő x_2 gyök abszolút értéke kisebb, mint x_1, de nagyobb, mint az összes többi gyök abszolút értéke, akkor ez a gyök is közelítőleg kiszámítható egy lineáris egyenletből. Ugyanis a (2.11) egyenletek közül a másodikat alkalmazva a (2.13) egyenletre

$$1 + \ldots = \frac{A_2}{A_0(x_1\, x_2)^{2^k}}.$$

A baloldal tetszőlegesen kevéssel különbözik 1-től, ha k elég nagy szám, amiből következik, hogy

$$(x_1 x_2)^{2^k} \approx \frac{A_2}{A_0}.$$

Mivel pedig láttuk, hogy

$$x_1^{2^k} \approx -\frac{A_1}{A_0},$$

következik, hogy

$$x_2^{2^k} \approx -\frac{A_2}{A_1}.$$

$x_2^{2^k}$ tehát közelítőleg kielégíti az

$$A_1 u + A_2 = 0$$

egyenletet.

Magát $|x_2|$-t e lineáris egyenlet gyökéből 2^k kitevőjű gyökvonással kapjuk:

$$|x_2| \approx \left(-\frac{A_2}{A_1}\right)^{2^{-k}}.$$

Az abszolút értékből pedig magát a helyes gyököt — a gyök helyes előjelét — úgy kapjuk, hogy az eredeti egyenletbe x_2 és $-x_2$ értékét behelyettesítjük.

A közelítést, amelyet a k-adik lépésben elértünk, a közbenső számítások pontosságának finomítása nélkül tovább már nem javíthatjuk, ha a polinomok *Graeffe*-sorozatában a k-adik lépésben kapott

$$p_k(u) = A_0 u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots$$

és a következő lépésben kapott

$$p_{k+1}(v) = B_0 v^n + B_1 v^{n-1} + B_2 v^{n-2} + \ldots$$

polinomokban

$$-B_2 : B_1 \approx (-A_2 : A_1)^2,$$

mert

$$-\frac{A_2}{A_1} \approx x_2^{2^k}, \qquad -\frac{B_2}{B_1} \approx x_2^{2^{k+1}}.$$

Az általános szabályt, amelyet a fenti meggondolások ismétlésével kapunk, ezek után megfogalmazhatjuk:

Legyen a

$$p(x)$$

polinomhoz tartozó *Graeffe*-sorozat

$$p_1(z)$$

$$p_2(t) \text{ és így tovább.}$$

Feltesszük, hogy a $p(x)$ polinom $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ gyökeire fennállanak az

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > \ldots > |x_n|$$

egyenlőtlenségek. Akkor a k-adik és a $(k+1)$-edik lépésben kapott $p_k(u)$ és $p_{k+1}(v)$ polinom együtthatóira a megszabott pontosság határain belül fennállanak a

$$-\frac{B_m}{B_{m-1}} \approx \left(-\frac{A_m}{A_{m-1}}\right)^2$$

közelítő egyenlőtlenségek, ha k elég nagy szám. Így választva k-t, az eredeti polinom zérushelyeinek abszolút értékei felemelve a 2^k hatványra, rendre közelítőleg megegyeznek az

$$A_0u + A_1 = 0,$$
$$A_1u + A_2 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$A_{n-1}u + A_n = 0$$

lineáris egyenletek gyökeivel. Az abszolút értékekből végül az eredeti polinom x_j zérushelyének helyes előjelét úgy határozzuk meg, hogy az eredeti egyenletbe behelyettesítjük x_j és $-x_j$ értékét.

Példa

12. Már meghatároztuk az

$$x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$$

egyenlet legnagyobb abszolút értékű gyökét. A másik két gyök meghatározására a *Graeffe*-sorozatot még egy lépéssel folytatni kell. A két utolsó egyenlet volt

$$p_3(u) = u^3 - 3{,}89 \cdot 10^5 u^2 + 0{,}99 \cdot 10^8 u - 10^8 = 0$$
$$p_4(v) = v^3 - 15{,}1 \cdot 10^{10} v^2 + 0{,}97 \cdot 10^{16} v - 10^{16} = 0.$$

A megszabott pontosság határain belül $-v^2$ együtthatója egyezik $-u^2$ együtthatójának négyzetével. De ez még nem áll fenn v és u együtthatóira is. A következő lépésben megkapjuk azt az egyenletet:

$$p_5(w) = w^3 - 2{,}28 \cdot 10^{22} w^2 + 0{,}94 \cdot 10^{32} w - 10^{32} = 0,$$

amelynek együtthatói a megkívánt pontosság határain belül rendre megegyeznek az előbbi egyenlet együtthatóinak négyzeteivel. Az eredeti egyenlet gyökeinek 32-ik hatványai tehát a következő egyenletek gyökeivel közelítőleg egyeznek:

$$u - 2{,}28 \cdot 10^{22} = 0,$$
$$2{,}8 \cdot 10^{22} u - 0{,}94 \cdot 10^{32} = 0,$$
$$0{,}94 \cdot 10^{32} u - 10^{32} = 0.$$

Innen

$$|x_1| \approx 4{,}997,$$
$$|x_2| \approx 2{,}001,$$
$$|x_3| \approx 1{,}002.$$

Behelyettesítéssel meghatározzuk, hogy a gyökök

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1.$$

* * *

Megjegyzések a Lobacsevszkij—Graeffe-módszerhez

Ha az egyenlet gyökeiről tudjuk, hogy

$$|x_1| > |x_2| > \ldots > |x_i|,$$

a többi gyök abszolút értéke pedig kisebb, mint x_i abszolút értéke, a *Lobacsevszkij—Graeffe*-módszer az elmondottak szerint az i legnagyobb abszolút értékű gyök meghatározására alkalmas. További meggondolással meggyőződhetünk arról, hogy e módszerrel mindazokat az egyszeres gyököket meg lehet határozni, amelyeknek abszolút értéke az egyenlet többi gyökének abszolút értékétől különbözik. Ennek módját a jelen fejezethez csatlakozó 43. feladat megoldása mutatja. A jelen fejezethez csatlakozó 44. feladat pedig olyan példát mutat be, amelyben az egyenlet minden gyökének abszolút értéke egyenlő, és a *Lobacsevszkij—Graeffe*-módszer nem vezet eredményhez.

A *Lobacsevszkij—Graeffe*-módszert akkor is, amikor eredményhez vezet, a vele járó számítások hosszadalmassága miatt inkább csak a gyökök durva közelítő értékeinek meghatározására célszerű alkalmazni. Az egyes gyökök közelítő értékeinek javítására más módszerekhez folyamodunk, amelyeket a következő §-ban ismertetünk.[6]

δ) Másodfokú egyenletek megoldása logarléccel

Az

$$x^2 + px + q = 0$$

egyenletnek két valós gyöke van, ha q negatív. Ha azonban $q > 0$, akkor a gyökök nem mindig valósak. A logarlécről rögtön leolvashatjuk $\sqrt{q}$ értékét. A gyökök akkor valósak, ha $\sqrt{q} \leq \frac{|p|}{2}$. Ezt könnyű becsülni.

Példák

$x^2 - 6x - 25 = 0$ gyökei valósak, mert $q < 0$.

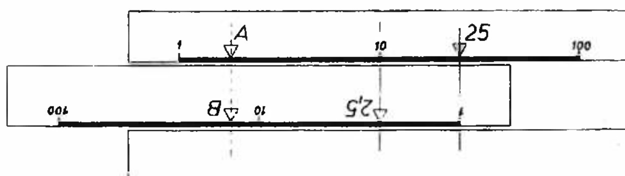
$x^2 - 6x + 25 = 0$ gyökei nem valósak, mert $q > 0$ és $\sqrt{q} > \frac{|p|}{2}$.

$x^2 - 10x + 16 = 0$ gyökei valósak, mert bár $q > 0$, de $\sqrt{q} < \frac{|p|}{2}$.

Ha már megállapítottuk, hogy a gyökök valósak, azokat a logarléccel határozhatjuk meg.

A logarléc tolókáját megfordítjuk, úgyhogy a fix skála balról jobbra, a tolóka skálája jobbról balra növekedjék (5. ábra).

Állítsuk a tolóka kezdőpontját a fix-skála 25 pontjára. Legyen a fix felső



5. ábra

[6] A *Lobacsevszkij—Graeffe*-módszer módosítható úgy, hogy feltétel nélkül valamennyi gyök meghatározására alkalmas. Akkor azonban a szabály bonyolultabb és még hosszadalmasabb számításokat igényel, amiért e módosítás értéke inkább elméleti.

skála A pontja szemben a tolóka alsó skáláján a B ponttal. Ha A pont abszcisszája a fix skálán $\lg a$, akkor a B ponté a tolókán $\lg 25 - \lg a = \lg \frac{25}{a}$.

A skálákon azonban nem az abszcisszákat olvassuk le, hanem a fix skálán az A pontnál $\lg a$ helyett a áll, a tolókán a B pontnál nem $\lg \frac{25}{a}$, hanem $\frac{25}{a}$ áll. A szemben levő pontokhoz tartozó számértékek szorzata tehát állandóan 25.

A logarlécet a tolókának ebben a „fordított helyzetében" használjuk másodfokú egyenletek megoldására.

Példák

1.

$$x^2 - 9{,}58\,x + 10{,}62 = 0.$$

A gyökök valósak, mert (a logarlécről leolvassuk, hogy)

$$\sqrt{10{,}62} \approx 3{,}65 < \frac{9{,}58}{2}.$$

Minthogy a gyökök szorzata 10,62, összege 9,58, mindkét gyök pozitív.

A logarlécen a fordított tolóka kezdőpontját a fix skála 10,62 pontjára állítjuk. Akkor a fix felső skálán és a tolóka alsó skáláján szemben fekvő számok szorzata 10,62. Ezek közül a számpárok közül ki kell keresni azt, amely összegül 9,58-at ad.

A jobb szélen a számpár összege $10{,}62 + 1 = 11{,}62$. A leolvasó fonállal balra haladva az összeg fogy, pl. amikor a felső skálán a fonál a 9-et fedi, az alsó skálán az 1,18-on áll. Az összeg: $9 + 1{,}18 = 10{,}18$. Tovább kell balra haladni. Kis gyakorlattal gyorsan megtaláljuk a megoldást, amikor a fonal a felső skálán a 8,30, az alsó skálán az 1,28 pontokat fedi:

$$8{,}30 + 1{,}28 = 9{,}58.$$

A gyökök

$$x_1 \approx 8{,}30 \qquad x_2 \approx 1{,}28.$$

2.

$$x^2 + 9{,}58\,x + 10{,}62 = 0.$$

A gyökök szorzata 10,62, összege $-9{,}58$. A gyökök egyenlő előjelűek, tehát mindkettő negatív. Az előbbi eljárással

$$x_1 \approx -8{,}30, \qquad x_2 \approx -1{,}28.$$

3.

$$x^2 - 8{,}2\,x - 21{,}6 = 0.$$

A gyökök szorzata negatív, tehát ellenkező előjelűek. Összegük 8,20, tehát a nagyobb abszolút értékű pozitív. A logarlécen a beállítás: a tolóka kezdőpontja és a fix skála 21,6 pontja fedik egymást. Most azt a számpárt kell megkeresni, amelyeknek különbsége 8,2. A kezdő helyzetben $21{,}6 - 1 = 20{,}6$. Balra megyünk. A fonal pl. a fix felső skála 10 pontját és a tolóka alsó skáláján 2,15 pontot fedi: $10 - 2{,}15 = 7{,}85$. Kissé vissza kell mennünk. A felső skála 10,3 és az alsó skála 2,1 pontja megfelelnek: $10{,}3 - 2{,}1 = 8{,}2$. A gyökök

$$x_1 \approx 10{,}3; \qquad x_2 \approx -2{,}1.$$

4. $$x^2 + 8{,}2\,x - 21{,}6 = 0.$$

A gyökök szorzata $-21{,}6$, tehát ellenkező előjelűek. Mivel összegük $-8{,}2$, a nagyobb abszolút értékű negatív.

$$x_1 \approx -10{,}3; \qquad x_2 \approx 2{,}1.$$

Ha $|q| < |p|$, akkor az $x^2 + px + q = 0$ egyenletből az

$$x = \frac{y}{k} \quad \left(\text{pl. } x = \frac{y}{2} \text{ vagy } \frac{y}{10}\right)$$

helyettesítéssel az

$$y^2 + kpy + k^2 q = 0$$

egyenletet állítjuk elő. Ennek gyökeiből számítjuk ki az eredeti egyenlet gyökeit.

5. $$x^2 + 4{,}86\,x + 3{,}26 = 0.$$

$$x = \frac{y}{2},$$

$$y^2 + 9{,}72\,y + 13{,}04 = 0;$$

$$y_1 \approx -8{,}1, \qquad x_1 \approx -4{,}05,$$

$$y_2 \approx -1{,}62, \qquad x_2 \approx -0{,}81.$$

Feladatok

Számítsuk ki a következő polinomok helyettesítési értékét az előírt c helyen:

1. $x^3 - 7x^2 + 8x + 10$; $c = 2$.
2. $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 5$; $c = 3$.
3. $2x^5 - 20x^4 + 3x^2 - 6$; $c = 2$.
4. $5x^3 - 20x^2 - 5x + 8$; $c = 0{,}5$.
5. $3{,}7x^5 - 5{,}5x^4 + 1{,}1x^3 - 1{,}5x + 4{,}5$; $c = 0{,}5$.
6. $1{,}1x^4 - 4x^2 - 9$; $c = -0{,}3$.
7. $3{,}5x^4 + 1{,}9x^3 + 1{,}2x^2 - 3{,}1$; $c = 0{,}8$.

Számítsuk ki a következő polinomok differenciálhányadosait az előírt c helyen:

8. A 2. példában felírt polinomét $c = 3$.
9. A 3. példában felírt polinomét $c = 2$.
10. A 4. példában felírt polinomét $c = 0{,}5$.
11. Az 5. példában felírt polinomét $c = 0{,}5$.
12. A 6. példában felírt polinomét $c = -0{,}3$.
13. A 7. példában felírt polinomét $c = 0{,}8$.

Számítsuk ki a következő polinomok helyettesítési értékét a polinom közbenső átrendezésével az előírt c helyen (10^{-4} pontossággal):

14. A 2. példában felírt polinomét $c = 3{,}5$.
15. A 3. példában felírt polinomét $c = 1{,}9\ (= 2 - 0{,}1)$.
16. A 4. példában felírt polinomét $c = 0{,}512$.
17. Az 5. példában felírt polinomét $c = 0{,}52$.
18. A 6. példában felírt polinomét $c = -0{,}295\ (= -0{,}3 + 0{,}005)$.
19. A 7. példában felírt polinomét $c = 0{,}818\ (= 0{,}8 + 0{,}02 - 0{,}002)$.

20. Határozzuk meg c-t úgy, hogy a

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

polinomot $(x - c)$ fogyó hatványai szerint átrendezve $(x - c)^{n-1}$ együtthatója zérus legyen.

Határozzuk meg a Horner-elrendezéssel, 3 tizedesre pontosan a következő egyenletek gyökeit a megjelölt számközben:

21. $x^3 + 2{,}6\,x - 3{,}2 = 0$; $[0; 1]$.
22. $x^3 - 10\,x^2 + 40\,x - 35 = 0$; $[1; 2]$.
23. $2{,}5\,x^3 - 3{,}1\,x^2 + 1{,}5\,x + 0{,}8 = 0$; $[-1; 0]$.
24. $x^4 - 3\,x^3 + 8\,x^2 - 5 = 0$; $[0; 1]$.
25. $x^4 + 5\,x^3 - 7\,x^2 + 10\,x - 12 = 0$; $[1; 2]$.
26. $x^5 - 8\,x^3 + 12\,x - 185 = 0$; $[3; 4]$.
27. $x^5 + x + 1 = 0$; $[-1; 0]$.
28. $x^5 - 3\,x^3 - 2 = 0$; $[1{,}5; 2]$.

Állapítsuk meg a következő egyenletek valós gyökeinek számát, határozzunk meg 1 egység nagyságú számközöket, amelyek a gyököket tartalmazzák és határozzuk meg ezeket 4 tizedesre pontosan:

29. $x^3 - 8\,x + 15 = 0$.
30. $x^3 - 7\,x - 7 = 0$.
31. $x^4 - 3\,x^2 + 4\,x - 1 = 0$.
32. $x^6 - 3\,x^2 + x - 1 = 0$.
33. $2\,x^3 - 31\,x^2 + 115\,x - 24 = 0$.

Számítsuk ki 5 tizedesre pontosan:

34. $x^3 - 9\,x^2 + 20\,x - 11 = 0$

egyenlet legnagyobb pozitív gyökét;

35. $x^3 + 3\,x^2 - 4\,x - 1 = 0$

egyenlet pozitív gyökét;

36. $x^3 + 6\,x^2 + 6\,x - 7 = 0$

egyenlet pozitív gyökét;

37. $x^3 - 5\,x + 1 = 0$

valamennyi reális gyökét;

38. $x^3 - 3x^2 + 8x + 10 = 0$

egyenlet negatív gyökét.

39. Osszuk fel a reális számok tartományát olyan szakaszokra, amelyekben az

$$x^4 + 2x^2 - 6x + 2$$

polinom monoton.

Oldjuk meg a következő tizenkét feladatot a Lobacsevszkij—Graeffe-módszerrel:

40. $2x^3 - 31x^2 + 115x - 24 = 0.$

(Lásd a 33. feladatot.)

41. $x^3 - 8x + 15 = 0.$

(Lásd a 29. feladatot.)

42. $x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 40x - 27 = 0.$

43. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0.$

44. $x^3 - 1 = 0.$ (*Rényi—Turán* idézett dolgozatából *Hajós György* feladata.)

45. $x^4 - 3x^3 - 125x^2 - 176x + 588 = 0.$

46. $1{,}23x^5 - 2{,}52x^4 - 16{,}1x^3 + 17{,}3x^2 + 29{,}4x - 1{,}34 = 0.$

47. Az ún. *Csebisev*-polinomok egyik típusát kapjuk, ha $\cos n\alpha$-t kifejezzük $\cos\alpha$ függvényeként, és a kifejtésben $\cos\alpha$ helyébe x-et írunk. Ezek a polinomok a közelítő számításokban fontos szerepet játszanak. Egyik tulajdonságuk, hogy minden zérushelyük valós, egymástól különböző szám és valamennyi a $[-1; 1]$ számközben van.

Határozzuk meg a hatodfokú *Csebisev*-polinom

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

zérushelyeit.

48. Egy más típusú *Csebisev*-polinom

$$x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105}.$$

Ennek is minden zérushelye valós, egymástól különböző szám, amelyek a $[-1; 1]$ számközben vannak.

Határozzuk meg a felírt polinom zérushelyeit.

49. Az n-edfokú $L_n(x)$ *Laguerre*-polinomot a következő egyenlet határozza meg:

$$n!\,e^{-x}L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}e^{-x}x^n.$$

E polinomok minden zérushelye valós, különböző és pozitív szám.

Határozzuk meg a negyedfokú *Laguerre*-polinom zérushelyeit. A negyedfokú *Laguerre*-polinom:

$$x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24.$$

50. Az n-edfokú $H_n(x)$ *Hermite*-polinomot a következő egyenlet határozza meg:

$$n!\, e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

E polinomok zérushelyei mind valós, egymástól különböző számok.
Határozzuk meg a hatodfokú *Hermite*-polinom zérushelyeit:

$$720 \cdot H_6(x) = x^6 - 15\, x^4 + 45\, x^2 - 15.$$

51. Az

$$a_{11}x^2 + 2\, a_{12}xy + \ldots + a_{44} = 0$$

másodrendű felület tengelyvektorainak meghatározásánál meg kell oldani a felület ún. karakterisztikus egyenletét:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A determináns szimmetrikus. Az ilyen egyenlet minden gyöke valós szám.
Oldjuk meg a

$$3\, x^2 + 5\, y^2 - z^2 - 4\, xy + 2\, xz + 6\, yz + 2\, x - 8\, y - 5\, z + 45 = 0$$

másodrendű felület karakterisztikus egyenletét:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 5 - \lambda & 3 \\ 1 & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Oldjuk meg a következő másodfokú egyenleteket logarléccel:

52. $x^2 - 6{,}76\, x + 8{,}42 = 0.$

53. $x^2 + 48{,}6\, x + 103 = 0.$

54. $x^2 - 18{,}4\, x - 34{,}5 = 0.$

55. $x^2 - 1{,}1\, x - 7{,}1 = 0.$

56. $x^2 - 0{,}8\, x + 0{,}11 = 0.$

57. $x^2 + 2{,}5\, x + 0{,}72 = 0.$

58. $x^2 - 15\, x - 10 = 0.$

59. Számítsuk ki a negyedfokú *Legendre*-polinom

$$\frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}$$

zérushelyeit.

C) Elsőfokú egyenletrendszerek közelítő megoldása

Ebben a fejezetben olyan elsőfokú (lineáris) egyenletrendszerek közelítő megoldásáról lesz szó, amelyekben az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletrendszert alkotó egyenletek számával. Azokat a tételeket, amelyekkel el lehet dönteni, hogy mikor nincs az egyenletrendszernek megoldása, mikor van csak egyetlen, és mikor végtelen sok megoldása, az elemi algebra és a determinánselmélet tankönyveiben megtaláljuk.

Ha már eldöntöttük, hogy a megoldandó egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, annak közelítő meghatározására többféle módszert alkalmazhatunk. A leglényegesebbekkel foglalkozik ez a fejezet.

α) Első módszer

A közelítő számítás alapgondolata a következő: Az egyenletrendszert alkalmasan átalakítva mindegyik ismeretlent közelítőleg — külön-külön — egyetlen osztással meghatározzuk. A közelítő értékeket azután fokozatosan javítjuk. A javításokat — ismét közelítőleg — olyan egyenletrendszerből határozzuk meg, amely az eredetitől csak az ismeretleneket nem tartalmazó tagokban különbözik.

A közelítő eljárás konvergenciájára könnyen felismerhető „elegendő" feltételek állapíthatók meg.

Az eljárást a következő példákon jól át lehet tekinteni. Az első példa olyan szerkezetű, hogy előzetes átalakításra nincs szükség.

Példa

1.

$$\begin{aligned} 3x + 0{,}03y + 0{,}06z - 12 &= 0; \\ -0{,}01x + 5y - 0{,}02z - 10 &= 0; \\ 0{,}02x + 0{,}02y - 4z - 8 &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Az első egyenletben x együtthatója, a másodikban y-é, a harmadikban z-é abszolút értékben sokkal nagyobb, mint a másik két-két ismeretlené. Az egyenleteket ezekre az ismeretlenekre megoldva

az első egyenletből .... $x = 4 - 0{,}01\,y - 0{,}03\,z;$

a másodikból .... $y = 2 + 0{,}002\,x + 0{,}004\,z;$

a harmadikból .... $z = -2 + 0{,}005\,x + 0{,}005\,y.$

Ha a jobb oldalakon a „kis" együtthatókkal szorzott ismeretleneket elhanyagoljuk, kapjuk az első közelítő értékeket

$$\begin{aligned} x_1 &= 4, \\ y_1 &= 2, \\ z_1 &= -2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

A megoldás pontos értékeit ezekből a közelítő értékekből úgy kapjuk, hogy ezekhez a h, k és l „javításokat" hozzáadjuk:

$$\begin{aligned} x &= 4 + h, \\ y &= 2 + k, \\ z &= -2 + l. \end{aligned}$$

A javítások meghatározására a javított értékeket a (2.14) egyenletrendszerbe behelyettesítjük:

$$\begin{aligned} 3h + 0{,}03k + 0{,}06l + [3\cdot 4 + 0{,}03\cdot 2 + 0{,}06(-2) - 12] &= 0; \\ -0{,}01h + 5k - 0{,}02l + [-0{,}01\cdot 4 + 5\cdot 2 - 0{,}02(-2) - 10] &= 0; \\ 0{,}02h + 0{,}02k - 4l + [0{,}02\cdot 4 + 0{,}02\cdot 2 - 4\cdot(-2) - 8] &= 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Tehát h, k és l javítások meghatározására a (2.16) egyenletrendszer szolgál, amelyben h, k és l együtthatói rendre ugyanazok, mint a (2.14) egyenletrendszerben x, y és z együtthatói, az ismeretlenektől mentes tagokat pedig úgy kapjuk, hogy a (2.14) egyenletek bal oldalán x, y és z helyébe azok közelítő értékeit helyettesítjük.

Világos, hogy h, k és l számára (2.16)-ból ugyanúgy kapunk közelítő értékeket, mint x, y és z számára a (2.14)-ből:

$$h_1 \approx -\frac{3 \cdot 4 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}06 \cdot (-2) - 12}{3} = 0{,}02;$$

$$k_1 \approx -\frac{-0{,}01 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 0{,}02 \cdot (-2) - 10}{5} = 0;$$

$$l_1 \approx \frac{0{,}02 \cdot 4 + 0{,}02 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) - 8}{4} = 0{,}03.$$

A javított értékek:

$$x_2 = x_1 + h_1 = 4 + 0{,}02 = 4{,}02,$$
$$y_2 = y_1 + k_1 = 2 + 0 = 2,$$
$$z_2 = z_1 + l_1 = -2 + 0{,}03 = -1{,}97.$$

Az eljárást ismételve (iterálva) az x_2, y_2 és z_2 közelítő értékekből a javított

$$x_3 = 4{,}0194,$$
$$y_3 = 2{,}0016,$$
$$z_3 = -1{,}9699$$

közelítő értékekhez jutunk.

Az eljárás lényegén nem változik semmi, ha az egyenletek és ismeretlenek száma 3-nál több.

* * *

(F) Be lehet bizonyítani, hogy az eljárás a pontos megoldáshoz konvergáló sorozatokra vezet, ha az első egyenletben x együtthatója

a másodikban y együtthatója

a harmadikban z együtthatója

abszolút értékben nagyobb, mint a másik két ismeretlenhez tartozó együtthatók abszolút értékeinek összege.

A számítás berendezését betűkkel a következő séma mutatja. Az egyenletek

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$$

Az elrendezés:

d_1	d_2	d_3	x_1	y_1	z_1
$+a_1x_1$	$+a_2x_1$	$+a_3x_1$			
$+b_1y_1$	$+b_2y_1$	$+b_3y_1$			
$+c_1z_1$	$+c_2z_1$	$+c_3z_1$			
d'_1	d'_2	d'_3	$+h_1$	$+k_1$	$+l_1$
$+a_1h_1$	$+a_2h_1$	$+a_3h_1$			
$+b_1k_1$	$+b_2k_1$	$+b_3k_1$			
$+c_1l_1$	$+c_2l_1$	$+c_3l_1$			
d''_1	d''_2	d''_3	$+h_2$	$+k_2$	$+l_2$
			.	.	.
			x	y	z

Jelmagyarázat: d'_1 a fölötte álló oszlop számainak összege:

$$d'_1 = d_1 + a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1,$$

ugyanígy:

$$d''_1 = d'_1 + a_1h_1 + b_1k_1 + c_1l_1$$

és így tovább.

A számpéldára alkalmazva

−12	−10	−8	4	2	−2
12	−0,04	0,08			
0,06	10	0,04			
−0,12	0,04	8			
−0,06	0	0,12	0,02	0	0,03
0,06	−0,0002	0,0004			
0	0	0			
0,0018	−0,0006	−0,12			
0,0018	−0,0008	0,0004	−0,0006	+0,0016	+0,0001
			4,0194	2,0016	−1,9699

Példa

2.

$$3{,}21\,x + 1{,}68\,y - 0{,}62\,z - 21{,}55 = 0$$
$$1{,}44\,x + 0{,}77\,y - 1{,}41\,z - 7{,}96 = 0$$
$$3{,}73\,x - 6{,}58\,y + 3{,}41\,z + 0{,}75 = 0.$$

Az egyenletrendszerre nem teljesül az (*F*) feltétel. Ezért azt először át kell alakítani. Az a törekvésünk, hogy az (*F*) feltételen túlmenően is

az első egyenletben	x együtthatója
a másodikban	y együtthatója
a harmadikban	z együtthatója

abszolút értékben „jóval" meghaladja a többi ismeretlen együtthatóit. Ezzel az eljárás konvergenciáját gyorsítjuk.

A következő módszerek alkalmazhatók:

1. A három egyenletet pótoljuk másokkal, amelyeket az eredeti egyenletek lineáris kombinálásával nyerünk.

2. Új ismeretleneket vezetünk be az eredetiek helyett, amelyekből az eredetieket könnyen ki lehet számítani.

Ha az első egyenlet baloldalát x együtthatójával osztjuk, y és z együtthatói közel 0,5 és —0,2-vel egyenlők. Ezért az

$$x = X - 0{,}5\,y + 0{,}2\,z$$

alkalmas transzformáció az első egyenlet átalakítására. Az egyenletrendszer három új egyenlete

$$\begin{aligned} 3{,}21\,X + 0{,}075\,y + 0{,}022\,z - 21{,}55 &= 0; \\ 1{,}44\,X + 0{,}05\,y - 1{,}122\,z - 7{,}96 &= 0; \\ 3{,}73\,X - 8{,}445\,y + 4{,}156\,z + 0{,}75 &= 0. \end{aligned}$$

Most már az első egyenlet megfelel az (*F*) feltételnek. Hogy a másik kettő is megfeleljen, azokat újakkal helyettesítjük.[7]

Például a harmadik baloldalából kivonjuk a második baloldalának 3-szorosát, a harmadik baloldalából kivonjuk az első baloldalát:

$$\begin{aligned} 3{,}21\,X + 0{,}075\,y + 0{,}022\,z - 21{,}55 &= 0; \\ -\,0{,}59\,X - 8{,}595\,y + 7{,}522\,z + 24{,}63 &= 0; \\ 0{,}52\,X - 8{,}52\,y + 4{,}134\,z + 22{,}3 &= 0. \end{aligned}$$

Még a második egyenletben kell z együtthatójának abszolút értékét kellően csökkenteni. Ezt az

$$y = Y + 0{,}9\,z$$

helyettesítéssel érjük el:

$$\begin{aligned} 3{,}21\,X + 0{,}075\,Y + 0{,}0895\,z - 21{,}55 &= 0; \\ -\,0{,}59\,X - 8{,}595\,Y - 0{,}2135\,z + 24{,}63 &= 0; \\ 0{,}52\,X - 8{,}52\,Y - 3{,}534\,z + 22{,}3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet is megfelel már az (*F*) feltételnek. Végül a harmadik egyenletben kell Y együtthatóját módosítani. Ezért a harmadik egyenletet pótoljuk a következő lineáris kombinációval:

[7] A számoló ügyessége az egyenletrendszer átalakításában nagy szerepet játszik.

harmadik — második — 0,2-szer első egyenlet baloldala

$$3{,}21\ X + 0{,}075 Y + 0{,}0895\ z - 21{,}55 = 0;$$
$$-0{,}59\ X - 8{,}595 Y - 0{,}2135\ z + 24{,}63 = 0;$$
$$0{,}468 X - 0{,}075 Y - 3{,}3384\ z + \ 1{,}98 = 0.$$

Ennek az egyenletrendszernek mindhárom egyenlete megfelel az (*F*) feltételnek. Alkalmazzuk a sémát:

−21,55	24,63	1,98	7	3	0,7
22,47	− 4,13	3,276			
0,225	−25,785	−0,225			
0,063	− 0,149	−2,337			
1,208	−5,434	2,694	−0,4	−0,6	−0,7
−1,284	0,236	−0,187			
0,045	5,157	0,045			
0,063	−0,149	−2,337			
−0,058	−0,190	0,215	0,02	−0,02	0,07
0,0642	−0,0118	0,0094			
−0,0015	0,1719	0,0015			
0,0063	−0,0149	−0,2337			
0,0110—	0,0448	−0,0078	−0,003	−0,005	−0,002
			$X \approx 6{,}617$,	$Y \approx 2{,}375$,	$z \approx 1{,}468$

$$x = X - 0{,}5 \cdot 3{,}6962 + 0{,}2 \cdot 1{,}468 \approx 5{,}0625;$$
$$y = 2{,}375 + 0{,}9 \cdot 1{,}468 \approx 3{,}6962;$$
$$z \approx 1{,}468.$$

β) Az öröklött hiba becslése lineáris egyenletrendszerek megoldásánál

Az eljárást két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszernél mutatjuk meg.

Az

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

együtthatói nem pontos számok. Közös hibakorlátjukat ε-nal jelöljük.

Becsüljük az

$$x = A,\ y = B$$

megoldás öröklött hibáját.

Az — előttünk ismeretlen — pontos egyenletrendszer:

$$(a_1 + h_1)x + (b_1 + k_1)y + (c_1 + l_1 = 0,$$
$$(a_2 + h_2)x + (b_2 + k_2)y + (c_2 + l_2) = 0.$$

Tudjuk, hogy

$$a_1 A + b_1 B + c_1 = 0,$$
$$a_2 A + b_2 B + c_2 = 0,$$

a pontos egyenletrendszer megoldása pedig valamely

$$x = A + \alpha, \qquad y = B + \beta,$$

mely számok a következő egyenleteket elégítik ki:

$$(a_1 + h_1)(A + \alpha) + (b_1 + k_1)(B + \beta) + c_1 + l_1 = 0,$$

$$(a_2 + h_2)(A + \alpha) + (b_2 + k_2)(B + \beta) + c_2 + l_2 = 0.$$

A két utolsó egyenletpárból következik, hogy

$$a_1\alpha + b_1\beta + (h_1 A + k_1 B + l_1) + h_1\alpha + k_1\beta = 0,$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + (h_2 A + k_2 B + l_2) + h_2\alpha + k_2\beta = 0.$$

Ha ezekben az egyenletekben

$$h_1\alpha; \quad k_1\beta; \quad h_2\alpha; \quad k_2\beta$$

szorzatokat a többi tag mellett elhanyagoljuk, a megoldás öröklött hibáira a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$a_1\alpha + b_1\beta + (h_1 A + k_1 B + l_1) = 0,$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + (h_2 A + k_2 B + l_2) = 0.$$

Az öröklött hibák tehát ugyanolyan szerkezetű egyenleteknek tesznek eleget, mint az öröklött hibával terhelt megoldások maguk, csak az ismeretlenektől mentes tagok helyébe az

$$u_1 = h_1 A + k_1 B + l_1,$$

$$u_2 = h_2 A + k_2 B + l_2$$

számok léptek, melyeknek abszolút értéke nem haladja meg a közös

$$M = (|A| + |B| + 1)\varepsilon$$

korlátot.

A felírt egyenletrendszerből kiszámítjuk és becsüljük az α és β öröklött hibák értékeit. Ha az egyenletrendszer

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

determinánsa nem zérus, akkor

$$|\alpha| \leqq \frac{(|b_1| + |b_2|)M}{D}; \qquad |\beta| \leqq \frac{(|a_1| + |a_2|)M}{D}.$$

Példák

3.
$$3{,}21\,x - 4{,}36\,y = 5{,}73,$$
$$2{,}13\,x + 8{,}63\,y = 12{,}65.$$

Az együtthatók közös hibakorlátja: 0,005.

Az egyenletrendszer determinánsa ≈ 37; $\approx 2{,}828$; $y \approx 0{,}768$.

$$|\alpha| \leqq \frac{(2{,}13 + 8{,}63)\,(2{,}828 + 0{,}768 + 1)}{37} \cdot 0{,}005 < 0{,}01.$$

$$|\beta| \leqq \frac{(3{,}21 + 4{,}36)\,(2{,}828 + 0{,}768 + 1)}{37} \cdot 0{,}005 < 0{,}005.$$

4.
$$47{,}11\,x + 13{,}72\,y = 40{,}44$$
$$13{,}72\,x + 4\,y = 11{,}78.$$

Az együtthatók közös hibakorlátja: 0,005.
Az egyenletrendszer determinánsa: $\approx 0{,}2$.

$$x \approx 0{,}6865; \quad y \approx 0{,}5903.$$

$$|\alpha| \leqq \frac{17{,}72 \cdot 2{,}2768}{0{,}2} \cdot 0{,}005 \approx 1{,}02\,;$$

$$|\beta| \leqq \frac{60{,}83 \cdot 2{,}2768}{0{,}2} \cdot 0{,}005 \approx 3{,}46.$$

Az öröklött hibák korlátai nagyobbak, mint maguk a megoldások. A megoldás nem használható.

γ) Második módszer: megoldás logarléccel

A lineáris egyenletrendszerek megoldása „eliminálással" azon a tényen alapszik, hogy pl. az

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

és az

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (2.17)$$

egyenletekből következik az

$$(a - m\,A)\,x + (b - m\,B)\,y + (c - m\,C)\,z + (d - m\,D) = 0 \qquad (2.18)$$

egyenlet és viszont a (2.18) egyenletből és a (2.17) egyenletek bármelyikéből következik a (2.17) egyenletek közül a másik.

Határozzuk meg m-et úgy, hogy

$$a - m\,A = 0; \qquad \text{vagyis} \qquad m = \frac{a}{A}$$

legyen. Akkor a (2.18) egyenlet már nem tartalmazza x-et. Ezt az ismeretlent kiküszöböltük, elimináltuk.

Példák

1.
$$4{,}17\,x - 2{,}13\,y + 1{,}17\,z + 2{,}55 = 0$$
$$-\,1{,}03\,x + 3{,}71\,y + 0{,}65\,z + 1{,}15 = 0.$$

A logarlécen megkeressük az 1,03 : 4,17 hányadost. A fix skála 1,03 pontjával fedésbe hozzuk a tolóka 4,17 pontját. A tolóka kezdőpontja a fix skálán megjelöli az $m \approx 0,247$ hányadost, melyet azonban felesleges kiszámítani. Ugyanakkor a tolóka

$$2,13 \quad 1,17 \quad 2,55$$

pontjai felett a fix skálán a

$$2,13\,m = 0,53, \quad 1,17\,m = 0,29, \quad 2,55\,m = 0,63$$

számokat olvassuk le. Ezeket a második egyenlet együtthatói alá írjuk, mégpedig változatlan előjellel, ha $a : A$ hányados negatív és ellenkező előjellel, ha ez a hányados pozitív. Magukat az ismeretleneket ki sem írjuk:

$$\begin{array}{rrrr} -1,03 & 3,71 & 0,65 & 1,15 \\ 1,03 & -0,53 & 0,29 & 0,63 \\ \hline & 3,18y + & 0,94z + & 1,78 = 0. \end{array}$$

A vonal alatt kaptuk a harmadik egyenletet, mely már x-et nem is tartalmazza. A művelet a tolóka egyszeri beállítását igényelte.

Elméletileg mindegy, hogy a kiküszöbölésnél a két egyenlet közül melyiket választjuk elsőnek. Ha azonban az együtthatók nem pontos, hanem közelítő értékek, akkor elsőnek azt az egyenletet célszerű választani, amelyben a kiküszöbölendő ismeretlen együtthatójának abszolút értéke nagyobb, mint ahogyan példánkban is tettük. Ekkor ugyanis $m < 1$, tehát a megszorzott együtthatók és azok hibái kisebbednek, míg 1-nél nagyobb tényezővel való szorzás az együtthatók hibáit is növeli.

A közelítő megoldást a következő két *példán* mutatjuk be.

2.

$$\begin{array}{r} 4,17\,x - 2,13\,y - 3,28 = 0 \\ -\,1,03\,x + 3,71\,y - 1,56 = 0 \\ \hline \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{rrrl} -1,03 & 3,71 & -1,56 & \\ 1,03 & -0,53 & -0,81 & \text{(logarléc beállítással)} \\ \hline & 3,18y - & 2,37 = 0 & y \approx 0,745; \end{array}$$

$$4,17\,x - 2,13 \cdot 0,745 - 3,28 = 0, \qquad x \approx 1,167.$$

Megjegyzés: $2,13 \cdot 0,745$ szorzatot ugyanazzal a logarléc beállítással kapjuk, amellyel 2,37 : 3,18 hányadost számítottuk.

3.

$$\begin{array}{r} 4,17\,x - 2,13\,y + 1,17\,z + 2,55 = 0 \\ -\,1,03\,x + 3,71\,y + 0,65\,z + 1,15 = 0 \\ 1,32\,x - 1,06\,y + 4,58\,z - 2,11 = 0 \\ \hline \end{array}$$

Kiküszöböljük az első egyenlet segítségével x-et a második és a harmadik egyenletből:

$$m = \frac{1,03}{4,17}\Bigg| \qquad \begin{array}{rrrr} -1,03 & 3,71 & 0,65 & 1,15 \\ 1,03 & -0,53 & 0,29 & 0,63 \\ \hline & 3,18\,y + & 0,94\,z + & 1,78 = 0; \end{array}$$

$$\left(m = \frac{1,32}{4,17}\right) \qquad \begin{array}{rrrr} 1,32 & -1,06 & 4,58 & -2,11 \\ -1,32 & 0,67 & -0,37 & -0,81 \\ \hline & -0,39\,y & +\ 4,21\,z & -\ 2,92 = 0. \end{array}$$

Következő lépésben kiküszöböljük y-t

$$\left(m = \frac{0,39}{3,18}\right) \qquad \begin{array}{rrr} -0,39 & 4,21 & -2,92 \\ 0,39 & 0,12 & 0,22 \\ \hline & 4,33z & -\ 2,70 = 0 \end{array} \qquad z \approx 0,623;$$

$$-0,39y + 4,21 \cdot 0,623 - 2,92 = 0 \qquad y \approx -0,769;$$

$$1,32x + 1,06 \cdot 0,769 + 4,58 \cdot 0,623 - 2,11 = 0 \qquad x \approx -1,180.$$

Behelyettesítve a kapott értékeket
az első egyenlet bal oldala két tizedesre pontosan = 0,
a második egyenlet bal oldala két tizedesre pontosan = −0,08,
a harmadik egyenlet bal oldala két tizedesre pontosan = 0.

Megjegyzés: Ha az egyenletekben az együtthatók közelítő értékei nem egyenlően pontosak, például az x együtthatója az első és a második egyenletben 0,1-re pontos, de a harmadik egyenletben 0,01-ra közelíti meg a pontos értéket, akkor x kiküszöbölése előtt a harmadik egyenletet végigszorozzuk 10-zel, hogy x együtthatóinak közelítő értékei valamennyi egyenletben egyenlő rendben legyenek pontosak. Ezután az előkészítő lépés után választjuk ki az egyenletek közül azt, melyben x együtthatójának abszolút értéke legnagyobb, hogy vele a másik két egyenletből az x ismeretlent kiküszöböljük.

Az eljárás átvihető több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerekre.

*

Lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldására az *α)* alatt vázolt első módszertől többé-kevésbé eltérő más elrendezések is használatosak. Ezek közül a lényegileg csak elrendezésben különböző *Gauss—Seidel*-féle iteráló és a *Southwell*-féle relaxáló módszert ismertetjük.[8]

δ) Harmadik módszer: a Gauss—Seidel-féle iteráló módszer

A módszert számpéldán mutatjuk be. A példa három ismeretlent tartalmaz, de a meggondolás és az elrendezés változatlanul alkalmazható akárhány ismeretlent tartalmazó feladat megoldására.

Feltesszük, hogy mindegyik egyenletben egy más és más ismeretlen együtthatójának abszolút értéke nagyobb, mint a többi együttható abszolút értékeinek öszszege. Ha az egyenletrendszer ennek a feltevésnek nem tesz eleget, ilyenné átalakítjuk. Ezzel az iteráló eljárás konvergenciája biztosítva van. (Hogy ez az átalakítás menynyi munkával jár, az egyenletrendszer szerkezetétől és a számoló ügyességétől függ.)

[8] Megemlítjük még a *Gauss*-tól származó elrendezést és a többnyire *Cholesaky*-ről elnevezett módszert (1916). Utóbbi módszert *Banachiewicz* (1938) matrix alakba öltöztette. Ezeket a szövegben nem ismertetjük. E módszerek leírása megtalálható pl. *M. G. Salvadori*: Numerical methods in engineering c. könyvében.

Az eljárást az előbbi fejezetben már más módon megoldott feladaton ismertetjük:

$$3{,}210\,x + 0{,}075\,y + 0{,}0895\,z - 21{,}55 = 0$$
$$-0{,}590\,x - 8{,}595\,y - 0{,}2135\,z + 24{,}63 = 0$$
$$0{,}468\,x - 0{,}075\,y - 3{,}3384\,z + 1{,}98 = 0$$

Az első egyenletben x együtthatójának abszolút értéke nagyobb, mint a másik kettő abszolút értékének összege. Ezt az egyenletet x-re oldjuk meg. Hasonló meggondolással a második egyenletből y-t és a harmadikból z-t fejezzük ki. Ebben az első lépésben az egyenletek állandóit $5 \cdot 10^{-3}$ pontossággal vesszük figyelembe:

$$x = 6{,}71 \qquad\qquad - 0{,}02\,y - 0{,}03\,z \qquad \text{(I)}$$
$$y = 2{,}87 - 0{,}07\,x \qquad\qquad - 0{,}03\,z \qquad \text{(II)}$$
$$z = 0{,}59 + 0{,}14\,x - 0{,}02\,y \qquad\qquad \text{(III)}$$

Az első közelítést az egyenletrendszerből számítás nélkül olvassuk le (a második tizedest is csak kerekítésre használva):

$$x_1 = 6{,}7;$$
$$y_1 = 2{,}9;$$
$$z_1 = 0{,}6.$$

Ezeket az értékeket behelyettesítjük az egyenletrendszer jobb oldalán álló kifejezésekbe. Ha x_1, y_1, z_1 pontos megoldás volna, az első egyenlet jobb oldalán a helyettesítés eredménye 6,7 volna, a második egyenletben 2,9, a harmadikban 0,6. Az eredmények azonban mások. A kiszámításukra szolgáló elrendezés:

	I.	II.	III.
	6,71	2,87	0,59
$x_1 = 6{,}7$	—	− 0,469	0,938
$y_1 = 2{,}9$	− 0,058	—	− 0,058
$z_1 = 0{,}6$	− 0,018	− 0,018	—
	$x_2 = 6{,}634$	$y_2 = 2{,}383$	$z_2 = 1{,}470$

Az eljárást a javított x_2, y_2, z_2 közelítő értékekkel megismételjük. Ebben a második lépésben az eredeti egyenlet állandóit $5 \cdot 10^{-4}$ pontossággal vesszük figyelembe:

$$x = 6{,}713 \qquad\qquad - 0{,}023\,y - 0{,}028\,z$$
$$y = 2{,}866 - 0{,}069\,x \qquad\qquad - 0{,}025\,z$$
$$z = 0{,}593 + 0{,}140\,x - 0{,}022\,y$$

Az x_3, y_3, z_3 közelítő megoldást a következő táblázatból számítjuk ki:

	I.	II.	III.
	6,713	2,866	0,593
$x_2 = 6{,}634$		$-0{,}458$	0,929
$y_2 = 2{,}383$	$-0{,}055$		$-0{,}053$
$z_2 = 1{,}470$	$-0{,}041$	$-0{,}037$	
	$x_3 = 6{,}617$	$y_3 = 2{,}371$	$z_3 = 1{,}469$

Az eljárást addig ismételjük, amíg a megkívánt pontosságot elértük.

e) Negyedik módszer: a Southwell-féle relaxálás[8]

A módszert először betű-együtthatókkal mutatjuk be. Az egyenleteket úgy rendezzük, hogy a jobboldalon 0 álljon, és a „főátlóban" az együtthatók értéke -1.

$$-x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + A_1 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$a_{21}x_1 - x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + A_2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots - x_n + A_n = 0. \qquad (N)$$

Ha $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ a megoldás valamely közelítő értékei, és ezeket helyettesítjük az egyenletek baloldalán, a helyettesítési értékek nem egyenlők zérussal, hanem rendre az $R_1, R_2, \ldots, R_n$ „maradékok"-kal.

Adjunk x_i^0 értékéhez h_i-t. Akkor R_i értéke $-h_i$-vel változik, a többi R_k pedig $+a_{ki}h_i$-vel. Válasszuk h_i-t R_i-vel egyenlőnek, akkor az i-edik egyenlet maradékát — és általában csak ezét — az

$$x_1^0, x_2^0, \ldots x_{i-1}^0, (x_i^0 + h_i), x_{i+1}^0, \ldots x_n^0$$

számok zérussá teszik.

Egy második lépésben egy másik maradékot teszünk zérussá. Ezzel azonban az i-edik egyenlet zérus maradékát ismét elrontjuk.

Minden lépés valamennyi maradékot is megváltoztatja. Hogy az eljárás ismétlésével az egyenletrendszer megoldásához egyre közelebb jussunk, minden lépésben azt az egyenletet szemeljük ki, melynek maradéka abszolút értékben legnagyobb.

A megoldást táblázatosan rendezzük. Az x_i ismeretlen rovata mellé írjuk az R_i maradék rovatát.

Példa

1. Az elrendezést ugyanannak az egyenletrendszernek megoldásán mutatjuk meg, amelyen az iteráló módszert is megismertük.

[8] A relaxálás elnevezés „fellazítás"-sal volna magyarra fordítható.

$$
\begin{aligned}
-x_1 - 0{,}023x_2 - 0{,}028x_3 + 6{,}713 &= 0\\
-0{,}069x_1 - x_2 - 0{,}025x_3 + 2{,}866 &= 0\\
0{,}140x_1 - 0{,}022x_2 - x_3 + 0{,}593 &= 0;
\end{aligned}
$$

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	6,713	0	2,866	0	0,593
6,713	— 6713		— 0,463		0,940
	0	2,403	2,403		1,533
	— 0,055		— 2,403		— 0,053
	— 0,055		0	1,480	1,480
	— 0,041		— 0,037		— 1,480
— 0,096	— 0,096		— 0,037		0
	0,096		0,007		— 0,013
	0	— 0,030	— 0,030		— 0,013
	0,001		0,030		— 0,001
	0,001		0	— 0,014	— 0,014
	0		0		0,014
0,001	0,001		0		0
	— 0,001		0		0
	0		0		0

A megoldás : az induló x_i^0 érték hozzáadva az ismételt eljárás folyamán x_i^0 javítására felhasznált értékeket, melyek az x_i rovatában egymás alatt állnak:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\approx 0 + 6{,}713 - 0{,}096 + 0{,}001 = 6{,}618\\
x_2 &\approx 0 + 2{,}403 - 0{,}030 = 2{,}373\\
x_3 &\approx 0 + 1{,}480 - 0{,}014 = 1{,}466.
\end{aligned}
$$

Takarékoskodhatunk az írásmunkával, ha az R_i-k rovatában a második sor leírását elhagyjuk, és mindjárt az első és a második sor összegét írjuk le, tehát fejben végezzük el az összevonást. Ugyanígy megtakaríthatjuk *minden* páros sor leírását, tehát a táblázat a következő:

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	6,713	0	2,866	0	0,593
6,713	0	2,403	2,403		1,533
	— 0,055		0	1,480	1,480
— 0,096	— 0,096		— 0,037		0
	0	— 0,030	— 0,030		— 0,013
	0,001		0	0 ,014	— 0,014
0,001	0,001		0		0
	0		0		0
6,618		2,373		1,466	

Még egyszerűbb a táblázat, ha az R_i maradékok rovatában a 0 leírását mindenk megtakarítjuk, és a tizedes vesszők elkerülése végett minden számot megszorzun 1000-rel:

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	6713	0	2866	0	593
6713	— 55	2403	2403		1533
— 96	— 96		— 37	1480	1480
	1	— 30	— 30		—13
1	1			—14	—14
6618		2373		1466	

Bizonyítás nélkül említjük meg, hogy a módszer mindig célhoz vezet, bármely

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$$

kezdőértékből indulunk is ki, ha minden együttható-sorban a főátlóban álló -1 együttható „dominál", azaz az együttható-sorban álló többi együttható abszolút értékének összege kisebb 1-nél.

* * *

A relaxálás módszerét a vázolt berendezéstől eltérően is lehet alkalmazni. Ahelyett, hogy minden lépésben csak egy ismeretlen közelítő értékét javíthatnánk, több, esetleg valamennyi ismeretlen közelítő értékét egyidejűleg is változtathatjuk ugyanazzal a „blokk-javítás"-sal. Ezt a javítást lehet úgy meghatározni, hogy az abszolút értékben legnagyobb maradék zérussá váljék, vagy úgy is, hogy egyszerre több maradék abszolút értéke csökkenjen.

Ha pl. valamennyi közelítő értéket egyidejűleg változtatjuk h-val, akkor az R_1 maradék

$$(-1 + a_{12} + \ldots + a_{1n})h = B_1 \cdot h$$

-val, az R_2 maradék pedig

$$(a_{21} - 1 + a_{23} + \ldots + a_{2n})\, h = B_2 \cdot h$$

-val változik. És így tovább. Ezért az egyenletrendszer állandóinak táblázatában a $B_1, B_2, \ldots B_n$ együttható-összegeket is feltüntetjük.

A blokk-relaxálás alkalmazásánál sok függ a számláló ügyességétől.

Példa

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert vegyesen alkalmazva az egyszerű és a blokk-relaxálást:

$$-x_1 + 0{,}875\, x_2 + 0{,}121\, x_3 - 1{,}132 = 0 \qquad (B_1 = -0{,}004)$$
$$0{,}444\, x_1 - x_2 + 0{,}222\, x_3 + 1{,}266 = 0 \qquad (B_2 = -0{,}334)$$
$$0{,}092\, x_1 + 0{,}545\, x_2 - x_3 + 2{,}256 = 0 \qquad (B_3 = -0{,}363).$$

A megoldó táblázat:

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3	Magyarázó oszlop
0	− 1,132	0	1,266	0	2,256	
3	− 0,012	3	− 1,002	3	− 1,089	Blokk-relaxálás
−1	− 1,144		0,264		1,167	
	1		− 0,444		− 0,092	
	− 0,144		− 0,180	1	1,075	
	0,121		0,222		− 1	
0,1	− 0,023	0,1	0,042	0,1	0,075	Blokk-relaxálás
	0		− 0,033		− 0,036	
	− 0,023		0,009	0,04	0,039	
	0,005		0,009		− 0,040	
	− 0,018	0,02	0,018		− 0,001	
	0,017		− 0,02		0,011	
	− 0,001		− 0,002	0,010	0,010	
	0,001		0,002		− 0,010	
$x_1=2,10$	0	$x_2=3,12$	0	$x_3=4,15$	0	

Feladatok

1. $$\begin{aligned} 3,1\,x + 4,2\,y - 3,5 &= 0 \\ 1,2\,x - 3,5\,y + 2,2 &= 0. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 55\,x + 3,3\,y - 5 &= 0 \\ x - 4,3\,y + 3,7 &= 0. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 123\,x - y + 53 &= 0 \\ 0,5\,x + 201\,y - 47 &= 0. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 123\,x - 51\,y + 37 &= 0 \\ 122\,x + 43\,y - 22 &= 0. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 522\,x - 177\,y - 66 &= 0 \\ 433\,x + 431\,y + 103 &= 0. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 1,22\,x - 1,32\,y + 3,96\,z &= 2,12 \\ 2,12\,x - 3,52\,y + 1,62\,z &= -1,26 \\ 4,23\,x - 1,21\,y + 1,09\,z &= 3,22. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 3,15\,x - 1,96\,y + 3,85\,z &= 12,95 \\ 2,13\,x + 5,12\,y - 2,89\,z &= -8,61 \\ 5,92\,x + 3,05\,y + 2,15\,z &= 6,88. \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 2,22\,x - 3,96\,y + 3,11\,z + 3,86\,u &= -3,08 \\ 3,09\,x - 1,97\,y + 6,23\,z + 5,17\,u &= -1,13 \\ 4,91\,x + 7,83\,y + 9,15\,z + 2,74\,u &= 8,69 \\ 1,34\,x - 9,86\,y - 2,89\,z - 7,23\,u &= 2,15. \end{aligned}$$

9. Becsüljük az 1. példa megoldásának öröklött hibáját, ha az együtthatók 0,005 pontossággal vannak megadva.

10. $$\begin{aligned} 3,05\,x + 4,92\,y + 6,85 &= 0 \\ 2,16\,x - 0,93\,y - 4,14 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer együtthatói 0,01 pontossággal vannak megadva. Oldjuk meg az egyenletrendszert, és becsüljük a megoldás öröklött hibáját.

11. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (3 értékes jegyre):

$$\begin{aligned} 3{,}21\,x + 0{,}71\,y + 0{,}34\,z &= 6{,}12 \\ 0{,}43\,x + 4{,}11\,y + 0{,}22\,z &= 5{,}71 \\ 0{,}17\,x + 0{,}16\,y + 4{,}73\,z &= 7{,}06. \end{aligned}$$

12. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 4\,x + 0{,}24\,y - 0{,}08\,z &= 8 \\ 0{,}09\,x + 3\,y - 0{,}15\,z &= 9 \\ 0{,}04\,x - 0{,}08\,y + 4\,z &= 20. \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} 3{,}5\,x + 2{,}8\,y + 6{,}2\,z &= 10{,}04 \\ 2{,}7\,x + 8{,}0\,y + 3{,}0\,z &= -7{,}16 \\ -4{,}0\,x - 3{,}6\,y - 2{,}8\,z &= 5{,}54. \end{aligned}$$

Megoldandó három értékes számjeggyel.

14.

$$\begin{aligned} 2{,}1\,x - 4{,}5\,y - 2{,}0\,z &= 19{,}07 \\ 3{,}0\,x + 2{,}5\,y + 4{,}3\,z &= 3{,}21 \\ -6{,}0\,x + 3{,}5\,y + 2{,}5\,z &= -18{,}25. \end{aligned}$$

Megoldandó három értékes számjeggyel.

15.

$$\begin{aligned} 2{,}0\,x_1 - 4\,x_2 - 3{,}25\,x_3 + x_4 &= 4{,}84 \\ 3{,}0\,x_1 - 3\,x_2 - 4{,}30\,x_3 + 8\,x_4 &= 8{,}89 \\ 1{,}0\,x_1 - 5\,x_2 + 3{,}30\,x_3 - 20\,x_4 &= -14{,}01 \\ 2{,}5\,x_1 - 4\,x_2 + 2{,}00\,x_3 - 3\,x_4 &= -20{,}29. \end{aligned}$$

Megoldandó három értékes számjeggyel.

16.

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - 2\,x_2 + 5{,}3\,x_3 - 2{,}1\,x_4 + x_5 &= 28{,}3 \\ x_1 + 4\,x_2 - 6{,}0\,x_3 + 4{,}5\,x_4 - 6{,}0\,x_5 &= -36{,}2 \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 - 7{,}3\,x_3 - 9{,}0\,x_4 + 3{,}4\,x_5 &= 24{,}5 \\ -2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 - 4{,}0\,x_4 + 6{,}0\,x_5 &= 16{,}2 \\ x_1 - 4\,x_2 + 6{,}5\,x_3 + x_4 - 3{,}0\,x_5 &= 4{,}3. \end{aligned}$$

Megoldandó három értékes számjeggyel.

17.

$$\begin{aligned} 4{,}00\,x_1 + 0{,}80\,x_2 + 1{,}20\,x_4 &= 5{,}60 \\ 8{,}00\,x_2 + 1{,}60\,x_3 + 1{,}60\,x_4 + 2{,}40\,x_5 &= -13{,}472 \\ 2{,}40\,x_1 + 0{,}80\,x_2 + 8{,}00\,x_3 + 1{,}60\,x_5 &= 30{,}16 \\ 1{,}80\,x_2 + 6{,}00\,x_4 + 0{,}60\,x_5 &= 6{,}54 \\ 2{,}20\,x_1 + 2{,}30\,x_3 + 1{,}50\,x_4 + 10{,}00\,x_5 &= -15{,}631. \end{aligned}$$

Megoldandó három értékes számjeggyel.

18. A következő $n = 6$ mérési eredményből jogosultnak látszik a feltevés, hogy az x és y változók között a kapcsolat lineáris. Számítsuk ki ennek a lineáris kapcsolatnak „legvalószínűbb"[10] együtthatóit. (Regressziós egyenes egyenlete.)

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	4,9	6,8	8,1	10,4	12,1	15,3

[10] A legvalószínűbb együtthatók értelmezését l. e feladat megoldásában (182. lap).

19. Elméleti meggondolásokból az derül ki, hogy x és y változók között a kapcsolat

$$y = A\,e^{Bx},$$

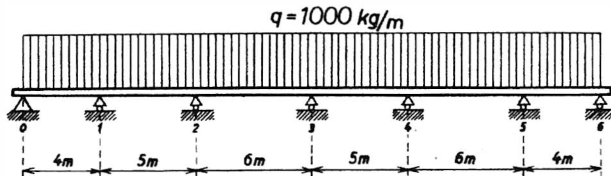
Határozzuk meg A és B állandók „legvalószínűbb“ értékét a következő mérési eredményekből ($n = 8$):

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	13,28	15,04	17,53	19,80	23,11	26,00	30,50	34,40

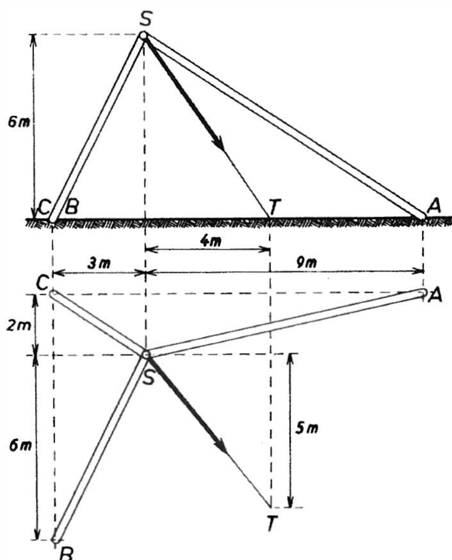
20.

$$\begin{aligned}
5x - 3y + 2z - 14t + 7u &= 2\\
2x + y - 3z + t - 12u &= 4\\
-x + y + 2z - 13t + u &= 1\\
x + 3y - 17z - 12t + 3u &= 3\\
-4x - 7y - 12z + t + 4u &= -1.
\end{aligned}$$

21. Számítsuk ki a 6. ábrán vázolt 7 támaszú tartó támasznyomatékait [*Pelikán I.:* Fokozatosan közelítő számítási módszerek néhány alkalmazása tartószerkezetek tervezésénél (Mérnöki Továbbképző Intézet)]. A megoszló terhelés 1000 kg/m.



6. ábra



7. ábra

22. Egy hattámaszú tartó támaszpontjai egymástói

$$l_1 = 3\text{ m},\ l_2 = 4\text{ m},\ l_3 = 5\text{ m},\ l_4 = 3\text{ m},\ l_5 = 4\text{ m}$$

távolságban vannak. Az első, negyedik és ötödik mezőben a megoszló terhelés 50 kg/m, a második és harmadik mezőben 500 kg/m. Meghatározandók a támasznyomatékok.

23. A 7. ábrán két nézetben vázolt bak 3 lábának talppontjai: A, B, C, s ezeknek viszonylagos helyzetét az ábrán feljegyzett méretek határozzák meg. A bak S csúcsában ST irányban 1 t nagyságú húzó erő támad. (T pont a lábak talppontjainak síkjában fekszik.) S pont magassága a vízszintes ABC sík felett 6 m. Határozzuk meg a rúderőket.

3. §. DIFFERENCIASZÁMÍTÁS

a) Bevezetés. Fogalmak és jelölések

Jelentsék

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad (x)$$

az x változó *egyenlőközű* (ekvidisztáns) értékeit:

$$x_k = x_{k-1} + d = x_0 + k \cdot d$$

k pozitív egész szám, d a beosztás *alaptávolsága.*

Az x-től függő y változó (függvény) megfelelő értékei (az ordináták):

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots \qquad (y)$$

$$y_k = f(x_k) = f(x_0 + k \cdot d).$$

Két egymás után következő ordináta különbségét nevezzük az y függvény *elsőrendű differenciájának.* (A nagyobb indexű ordináta a kisebbítendő.) Jele Δy_k vagy rövidebben Δ_k:

$$\boxed{\Delta_k = \Delta y_k = y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k).}$$

Ezt a differenciát nevezzük *haladó differenciának.* Ezzel szemben *retrográd differenciának* nevezzük az

$$\boxed{R_k = Ry_k = y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}) = \Delta_{k-1}}$$

különbséget.

Ha az (x) sorozat elemei közé közbeiktatjuk a felező pontokat is, tehát minden x_k elé az

$$x_k - \frac{d}{2}$$

elemet, x_k után az

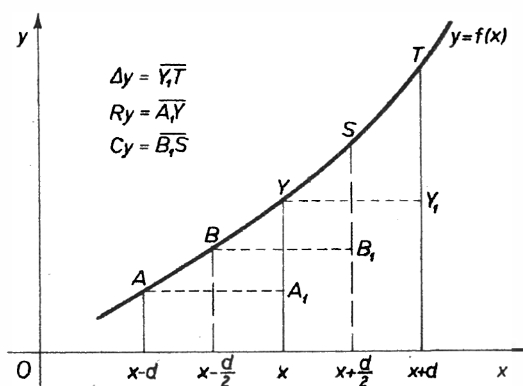
$$x_k + \frac{d}{2}$$

elemet, akkor az (y) sorozatot az

$$f\left(x_k - \frac{d}{2}\right)$$

és az

$$f\left(x_k + \frac{d}{2}\right)$$



8. ábra

elemekkel kell kiegészíteni. *Centrális differenciának* nevezzük a közbeiktatott elemek különbségét:

$$C_k = Cy_k = f\left(x_k + \frac{d}{2}\right) - f\left(x_k - \frac{d}{2}\right).$$

A háromféle differenciát szemlélteti a 8. ábra.

b) Haladó differenciák

α) A differenciák táblázata

Az elsőrendű differenciák sorozatából ugyanazzal a szabállyal alkotjuk a másodrendű differenciák sorozatát, mint az y sorozatból az elsőrendű differenciákat. A másodrendű differenciákból a harmadrendű differenciák sorozatához jutunk, és így tovább. Jelképesen (szimbolikusan) kitevőkkel jellemezzük a magasabbrendű differenciákat. A másodrendű differenciák definíciója:

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - 2\,y_{k+1} + y_k.$$

Általában az $n+1$-edrendű differenciák definíciója:

$$\Delta^{n+1} y_k = \Delta^n y_{k+1} - \Delta^n y_k.$$

A differenciák táblázatát többnyire a következő *átlós elrendezésben* szerkesztjük, melyben a differenciák értékét mindenkor a kisebbítendő és a kivonandó sora közé írjuk. (Az átlós elrendezéstől különböző vízszintes elrendezés is előfordul egyes számításoknál. L. pl. a 24. feladatot.)

y_0					
	Δy_0				
y_1		$\Delta^2 y_0$			
	Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
	Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
	Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
y_4		$\Delta^2 y_3$			
	Δy_4				
y_5					

Példák

1. Írjuk fel táblázatosan az $y = x^3$ függvény különböző rendű differenciáit. Legyen az (x) sorozat kezdő eleme és az alaptávolság:

$$x_0 = 0, \qquad d = 1.$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		
		61			
5	125				

2. Írjuk fel táblázatosan az $y = x^3$ függvény különböző rendű differenciáit. Legyen $x_0 = 8$, $d = 0{,}1$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
8	512,000				
		19,441			
8,1	531,441		0,486		
		19,927		0,006	
8,2	551,368		0,492		0
		20,419		0,006	
8,3	571,787		0,498		0
		20,917		0,006	
8,4	592,704		0,504		
		21,421			
8,5	614,125				

Mindkét példában észrevesszük, hogy a függvény harmadrendű differenciáinak sorozata azonos számokból áll, tehát a negyedrendű differenciák nullával egyenlők.

I. tétel:

Az $y = x^n$ függvény ekvidisztáns helyettesítési értékeinek n-edrendű differenciái azonos számok, amelyek az x_0 kezdőértéktől függetlenek. Ha a beosztás alaptávolsága d, akkor az n-edrendű differenciák $n!\,d^n$-nel egyenlők.

Az I. tételt később bizonyítjuk.

β) Szimbolikus műveletek

(Δ) Jelentse a differenciaképzés műveletét a Δ-jel:

$$\Delta f = f(x + d) - f(x).$$

(D) Jelentse a differenciálhányados képzésének műveletét a D jel:

$$Df = f'(x).$$

(*E*) Jelentse a független változó megnövelésének műveletét az E jel:

$$Ef = f(x + d).$$

(*M*) Jelentse a számtani középérték képzésének műveletét az M jel:

$$Mf = \frac{f(x + d) + f(x)}{2}.$$

E jelek ismételt alkalmazását kitevőkkel jelezzük: pl.

$$E^2f = f(x_0 + 2\,d).$$

E négy jelet az alapműveletekkel úgy lehet összekapcsolni, mint a betűszámokat.

Fennállnak a következő azonosságok. Jelentsék u és v az x változó függvényeit, k valamely konstans számot.

$$\left.\begin{aligned} \Delta(u \pm v) &= \Delta u \pm \Delta v \\ \Delta(ku) &= k \cdot \Delta u \\ \Delta^n(\Delta^m u) &= \Delta^{n+m} u \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} D(\Delta u) &= \Delta(Du) \\ E(\Delta u) &= \Delta(Eu) \\ M(\Delta u) &= \Delta(Mu) \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Bebizonyítjuk pl. az (α) csoport első egyenletét:

$$\Delta(u + v) = u(x + d) + v(x + d) - u(x) - v(x) = \Delta u + \Delta v.$$

Feladatok

1. Bizonyítsuk be az (α) csoport másik két egyenletét.
2. Bizonyítsuk be a (β) csoport egyenleteit.
3. Értelmezzük és bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$Ef = (1 + \Delta)f, \qquad (3.1)$$

rövidebben

$$F = 1 + \Delta.$$

Az egyenlet bal oldala

$$Ef = f(x + d).$$

Az egyenlet jobb oldala

$$(1 + \Delta)f = f + \Delta f = f(x) + f(x + d) - f(x) = f(x + d).$$

Ezzel a (3.1) azonosság be van bizonyítva.

4. Értelmezzük és bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E.$$

5. Értelmezzük és bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$M = 1 + \frac{1}{2}\Delta.$$

γ) Alapképletek

A) Számítsuk ki a (3.1) azonosság felhasználásával az n indexszel meghatározott

$$y_n = f(x_0 + nd)$$

függvényértéket az f függvény differenciáiból (kezdőérték x_0, alaptávolság d).

$$y_n = E^n y_0 = (1 + \Delta)^n y_0 = \left[1 + \binom{n}{1}\Delta + \binom{n}{2}\Delta^2 + \dots + \Delta^n\right] y_0$$

$$\boxed{y_n = y_0 + \binom{n}{1}\Delta y_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^n y_0} \qquad (3.2)$$

A (3.2) azonosság a differenciaszámítás egyik alapképlete. Kifejezi a közvetlen kapcsolatot y_n értéke és az x_0 kezdőértékkel képezett differenciák között.

B) Számítsuk ki a (3.1) egyenlet felhasználásával az x_0 kezdőértékkel képezett n-edrendű differenciát közvetlenül az $\{y\}$ sorozat elemeiből.

A (3.1) egyenletet

$$\Delta = E - 1$$

alakban írjuk fel. Az n-edik hatványra emelve kapjuk

$$\Delta^n y_0 = (E - 1)^n y_0 = \left[E^n - \binom{n}{1}E^{n-1} + \binom{n}{2}E^{n-2} + \dots + (-1)^n\right] y_0$$

$$\boxed{\Delta^n y_0 = y_n - \binom{n}{1} y_{n-1} + \binom{n}{2} y_{n-2} - \dots + (-1)^n y_0} \qquad (3.3)$$

A (3.3) azonosság a differenciaszámítás másik alapképlete. Kifejezi a közvetlen kapcsolatot az n-edrendű differencia és az $\{y\}$ sorozat elemei között.

Példák

3. Számítsuk ki n^3 értékét az $y = x^3$ differenciatáblázatból ($x_0 = 0$, $d = 1$) a (3.2) képlet alkalmazásával.

Az 1. példában kiszámított táblázat szerint:

$$y_0 = 0, \quad \Delta y_0 = 1; \quad \Delta^2 y_0 = 6; \quad \Delta^3 y_0 = 6;$$
$$\Delta^4 y_0 = 0.$$

A (3.2) alapképlet szerint

$$10^3 = y_0 + \binom{10}{1}\Delta y_0 + \binom{10}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{10}{3}\Delta^3 y_0 =$$

$$= 0 + 10 \cdot 1 + 45 \cdot 6 + 120 \cdot 6 = 1000;$$

$$27^3 = y_0 + \binom{27}{1}\Delta y_0 + \binom{27}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{27}{3}\Delta^3 y_0 = 19683.$$

4. Alkalmazzuk a (3.2) képletet az

$$y_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$$

számok sorozatának differenciatáblázatára.

0					
	1				
1		$-\frac{1}{1\cdot 2}$			
	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}$		
$1+\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2\cdot 3}$		$-\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	
	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}$		$\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3\cdot 4}$		$-\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$	
	$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}$		
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4\cdot 5}$			

A (3.2) képlet alkalmazásával tehát

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \ldots - (-1)^n \frac{1}{n}\binom{n}{n}.$$

* * *

Az I. tétel bizonyítása

Képezzük az $y = x^n$ függvény (kezdőérték x, alaptávolság d) elsőrendű differenciáját:

$$\Delta(x^n) = (x+d)^n - x^n = \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot d + \binom{n}{2} x^{n-2} d^2 + \ldots + d^n.$$

Az elsőrendű differencia 1-gyel alacsonyabb fokú polinom az x változóban. A legmagasabb fokú tag együtthatója: $n \cdot d$.

x^n másodrendű differenciáját ebből a polinomból úgy kapjuk, hogy az (α) azonosságok közül az elsőt és a másodikat alkalmazzuk. Az eredmény $(n-2)$-edfokú polinom az x változóban. A legmagasabb fokú tag együtthatója: $n(n-1)d^2$.

A harmadrendű differencia $(n-3)$ fokú polinom,
a negyedrendű differencia $(n-4)$ fokú polinom,
az n-edrendű differencia 0 fokú polinom, azaz konstans, amelynek értéke: $n!\,d^n$.
Ez pedig éppen az I. tétel állítása.
A bizonyításból látható az általánosabb

II. tétel

Minden n-edfokú polinom ekvidisztáns helyettesítési értékeinek n-edrendű differenciái azonos számokból állanak.

Elnevezés. Az $\{y\}$ sorozatot n-edrendű számtani sorozatnak nevezzük, ha az n-edrendű differenciák azonos számok.

A II. tétel szerint minden n-edfokú polinom ekvidisztáns helyettesítési értékei n-edrendű számtani sorozatot alkotnak.

Feladat

6. Állítsuk fel x^6 függvény differenciatáblázatát $x = 0$ kezdőértékkel és $d = 1$ alaptávolsággal. Számítsuk ki ebből a táblázatból 23^6 értékét.

$$(23^6 = 148\,035\,889)$$

* * *

A faktoriális függvény: $(x)_{d,k}$. Ezt a függvényt a következő képlettel értelmezzük:

$$(x)_{d,k} = x(x-d)(x-2d)\ldots(x-kd+d).$$

Ha az alaptávolság $d = 1$, akkor

$$(x)_{1,k} = (x)_k = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1),$$

tehát

$$\frac{(x)_k}{k!} = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

Feladat

7. Bizonyítsuk be, hogy

$$\Delta\binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}.$$

* * *

Magasabbrendű számtani sorok összegének kiszámítása

Jelöljük s_n-nel az

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots \qquad \{y\}$$

számsorozat első n elemének összegét:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k .$$

Az $\{s_n\}$ sorozat elsőrendű differenciái alkotják az $\{y\}$ sorozatot:

$$s_{n+1} - s_n = y_n,$$

tehát az $\{s_n\}$ sorozat $(r+1)$-edrendű differenciái megegyeznek az $\{y\}$ sorozat r-edrendű differenciáival. Eszerint a (3.2) képletet alkalmazva az $\{s_n\}$ sorozat differenciatáblázatára:

$$\begin{array}{ccc} s_0 = 0 & & \\ & y_0 & \\ s_1 & & \Delta y_0 \\ & y_1 & \\ s_2 & & \Delta y_1 \\ & y_2 & \\ s_3 & & \end{array}$$

$$s_{n+1} = 0 + \binom{n+1}{1} y_0 + \binom{n+1}{2} \Delta y_0 + \binom{n+1}{3} \Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0 .$$

Ha az $\{y\}$ sorozat r-edrendű számtani sorozat, akkor az $\{s_n\}$ sorozat $(r+1)$-edrendű számtani sorozat.

Feladatok

8. Számítsuk ki az

$$y_0 = a, \quad y_1 = a + d, \quad y_2 = a + 2d, \ldots$$

elsőrendű számtani sorozat részletösszegeit.

Mivel az $\{y\}$ sorozat másodrendű differenciái 0-val egyenlők, az $\{s_n\}$ sorozat harmadrendű differenciái nullák:

$$s_n = 0 + \binom{n}{1} y_0 + \binom{n}{2} \Delta y_0 = na + \frac{n(n-1)}{2} d,$$

vagy

$$s_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1) d] = \frac{n}{2} (y_0 + y_{n-1}).$$

9. Számítsuk ki az egész számok négyzeteinek összegét 1-től n-ig. A sorozat másodrendű számtani sorozat. Tehát a (3.2) képlet szerint

$$s_n = 0 + \binom{n}{1} y_0 + \binom{n}{2} \Delta y_0 + \binom{n}{3} \Delta^2 y_0 = n \cdot 1^2 + \frac{n(n-1)}{2} (2^2 - 1^2) +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} (3^2 - 2 \cdot 2^2 + 1^2) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1).$$

10. Bizonyítsuk be, hogy

a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2;$

b) $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30} n (n + 1) (2n + 1) (3n^2 + 3n - 1);$

c) $2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2}{3} n (n + 1) (2n + 1);$

d) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3} n (2n - 1) (2n + 1).$

* * *

Ha az $f(x)$ függvény nem polinom, az ekvidisztáns helyettesítési értékek nem alkotnak r-edrendű számtani sort, bárhogyan választjuk is a pozitív egész r számot. Ha az r-edrendű differenciákat valamely konstanssal, az $(r + 1)$-edrendű differenciákat 0-val helyettesítjük, ez ekvivalens azzal, mintha a függvényt valamely r-edfokú polinommal helyettesítettük volna. A hibát, amely ezzel a művelettel jár, később becsülni fogjuk.

t C°	p kg/cm²	Δp	$\Delta^2 p$	$\Delta^3 p$
80	1,37			
		0,31		
85	1,68		0,04	
		0,36		0,03
90	2,03		0,07	
		0,42		0,00
95	2,45		0,07	
		0,49		0,01
100	2,94		0,08	
		0,57		0,00
105	3,51		0,08	
		0,65		0,02
110	4,16		0,10	
		0,75		0,01
115	4,91		0,11	
		0,86		
120	5,77			

Példák

5. t C° hőmérsékleten egy gáztömeg nyomását a mellékelt táblázatban feltüntetett p értékben mérték (nyomás kg/cm²-ben). Az első-, másod- és harmadrendű differenciákkal kiegészített táblázat:

t C°	p kg/cm²	Δp	$\Delta^2 p$	$\Delta^3 p$
80	1,46			
		0,25		
85	1,71		0,08	
		0,33		0
90	2,04		0,08	
		0,41		0
95	2,45		0,08	
		0,49		0
100	2.94		0,08	
		0,57		0
105	3,51		0,08	
		0,65		0
110	4,16		0,08	
		0,73		0
115	4,89		0,08	
		0,81		
120	5,70			

Helyettesítsük a harmadrendű differenciákat nullával, azaz tekintsük az empirikus függvényt másodfokú függvénynek. A 100 C° sorából kiindulva (előre és hátra) „javítjuk" Δp és azután p értékeit ($\Delta^3 p = 0$; $\Delta^2 p = 0{,}08$).

Más-más eredményt kapunk a p nyomás értékeire pl. 120 C° mellett, ha az eredeti táblázatra és a javított táblázatra alkalmazzuk a (3.2) képletet. A p nyomás értéke 120 C° mellett a táblázat 9-ik sorában áll, ha tehát az első sorban álló 1,37 kg/cm² (vagy a javított táblázatban 1,46 kg/cm²) nyomást p_0-val jelöljük, a 9-ik sorban álló értéket p_8-cal kell jelölnünk. Az eredeti táblázatból

$$p_8 = p_0 + \binom{8}{1}\Delta p_0 + \binom{8}{2}\Delta^2 p_0 + \binom{8}{3}\Delta^3 p_0 =$$

$$= 1{,}37 + 8\cdot 0{,}31 + 28\cdot 0{,}04 + 56\cdot 0{,}03 = 6{,}65\ \text{kg/cm}^2.$$

A javított táblázatból

$$p_8 = 1{,}46 + 8\cdot 0{,}25 + 28\cdot 0{,}08 = 5{,}70\ \text{kg/cm}^2.$$

Az első számítás eredménye nem egyezik meg az empirikus táblázat 9-ik sorában álló 5,77 kg/cm² értékkel, mert a függvény nem polinom. A második számítás eredménye megegyezik a javított táblázat 9-ik sorában álló 5,70 kg/cm² értékkel, mert a javított táblázat másodfokú polinom táblázata.

Később részletesen fogunk foglalkozni olyan differenciatáblázatok alkalmazásával, amelyek nem polinomokhoz tartoznak.

6. Az alanti táblázat a szögek tangenseit tünteti fel 70° és 77° között 4 tizedesre pontosan. Az alaptávolság $d = 1°$. A negyedrendű differenciák oszlopáig kiegészített táblázat a következő:

	tg	Δ tg	Δ^2 tg	Δ^3 tg	Δ^4 tg
70°	2,7475				
		0,1567			
71°	2,9042		0,0168		
		0,1735		0,0029	
72°	3,0777		0,0197		0,0007
		0,1932		0,0036	
73°	3,2709		0,0233		0,0013
		0,2165		0,0049	
74°	3,4874		0,0282		0,0009
		0,2447		0,0058	
75°	3,7321		0,0340		0,0022
		0,2787		0,0080	
76°	4,0108		0,0420		
		0,3207			
77°	4,3315				

Ha a negyedrendű differenciákat 0-val helyettesítjük, a tangens függvényt harmadfokú polinommal helyettesítettük.

Feladat

11. Számítsuk ki a 6. példában közölt függvénytáblázatból a (3.2) alapképlet segítségével tg 78° értékét, ha a negyedrendű differenciákat 0-val helyettesítjük. (Extrapolálás.)

Első megoldás: kezdőérték $y_0 = 70°$, tehát a 78°-hoz tartozó tg 78° = y_8:

$$y_8 \approx (1+\Delta)^8 y_0$$

$$\approx y_0 + \binom{8}{1}\Delta y_0 + \binom{8}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{8}{3}\Delta^3 y_0$$

$$\approx 2{,}7475 + 8 \cdot 0{,}1567 + 28 \cdot 0{,}0168 + 56 \cdot 0{,}0029$$

$$\approx 4{,}6339.$$

Második megoldás: kezdőérték $y_0 = 74°$, tehát a 78°-hoz tartozó tg 78° = y_4

$$y_4 \approx (1+\Delta)^4 y_0$$

$$\approx y_0 + \binom{4}{1}\Delta y_0 + \binom{4}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{4}{3}\Delta^3 y_0$$

$$\approx 3{,}4874 + 4 \cdot 0{,}2447 + 6 \cdot 0{,}0340 + 4 \cdot 0{,}0080$$

$$\approx 4{,}7022.$$

Ha a negyedrendű differenciákat nem helyettesítjük 0-val, hanem csak az ötödrendűeket, akkor a következő megoldást kapjuk.

Kezdőérték $y_0 = \text{tg } 73°$, tehát tg 78° = y_5

$$y_5 \approx (1+\Delta)^5 y_0$$

$$\approx 3{,}2709 + 5 \cdot 0{,}2165 + 10 \cdot 0{,}0282 + 10 \cdot 0{,}0058 + 5 \cdot 0{,}0022$$

$$\approx 4{,}7044.$$

Valójában a 4 tizedesre kiszámított táblázati érték tg 78° = 4,7046.

A táblázati értékeket nem szokás az 5. példa mintájára módosítani. Ellenben a differenciaszámítás képleteivel a táblázatból úgy számítunk interpolált értékeket, hogy valamely rendszámtól kezdve a differenciákat a képletekben zérussal helyettesítjük. Ezt illusztrálja a 11. feladat. Később látni fogjuk, hogyan kell a hibát becsülni, amelyet ezzel az eljárással okozunk.

δ) A differenciaszámítás alkalmazásai

1°. A Newton-polinom

Feladatok

12. Valamely függvénytáblázatban meg vannak adva az $y = f(x)$ függvény értékei az ekvidisztáns

$$x = 0, \quad 1, \quad 2, \ldots, n \qquad \text{helyeken:}$$

$$y = y_0, \quad y_1, \quad y_2, \ldots, y_n.$$

Írjuk fel azt a $p(x)$ polinomot, amely a megadott helyeken a megadott értékeket veszi fel.

A keresett polinomot a (3.2) alapképletből úgy kapjuk, hogy $\Delta^k y_0$ együtthatója: $\binom{n}{k}$ helyébe az $\binom{x}{k}$ függvényt helyettesítjük:

$$p(x) = y_0 + \binom{x}{1} \Delta y_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{x}{n} \Delta y_0$$

vagy kifejtve a differenciák együtthatóit:

$$p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} x \cdot (x-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} x(x-1) \ldots (x-n+1) \tag{3.4}$$

Ez a polinom a függvény n-edfokú *Newton*-polinomja a megadott számközben. (A *Newton*-polinom a táblázatban megadott függvénnyel a megadott helyeken megegyezik, más helyeken tőle általában különbözik. Ha azonban az eredeti függvény maga is n-edfokú polinom, akkor vele ez a polinom azonosan egyenlő.)

Az állítás bizonyítása

Közvetlenül kiszámíthatjuk a (3.4) képletből a (3.2) alapképlet figyelembevételével, hogy

$$p(0) = y_0$$

$$p(1) = y_0 + \Delta y_0 = y_1$$

$$p(2) = y_0 + 2\,\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_2$$

és így tovább:

$$p(n) = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{n}{n} \Delta^n y_0 = y_n.$$

13. (A 12. feladat általánosítása.) Valamely függvénytáblázatban meg vannak adva az $y = f(x)$ függvény értékei az ekvidisztáns

$$x = a, \quad a + d, \quad a + 2d, \ldots, a + nd \quad \text{helyeken:}$$

$$y = y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n.$$

Írjuk fel azt az n-edfokú polinomot, amely a megadott helyeken a megadott értékeket veszi fel. Ez a feladat a 12. feladatra vezethető vissza, ha az x változó helyébe az

$$x = a + dt: \qquad t = \frac{x-a}{d}$$

helyettesítéssel a t változót vezetjük be. Ugyanis x és t változók összetartozó értékei

$$x = a, \quad a + d, \quad a + 2d, \ldots, a + nd$$

$$t = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n.$$

Az $f(x)$ függvény tehát a t változónak olyan függvénye, amely a

$$t = 0, \quad 1, \quad 2, \ldots, n$$

helyeken az $y = y_0, \quad y_1, \quad y_2, \ldots, y_n$ értékeket veszi fel.

A feladat megoldása eszerint a

$$p(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)\ldots(t-n+1)$$

polinom, vagy visszaírva t helyébe az $\frac{x-a}{d}$ törtet:

$$p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}\frac{x-a}{d} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}\frac{(x-a)(x-a-d)}{d^2} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}\frac{(x-a)(x-a-d)\ldots(x-a-nd+d)}{d^n} \qquad (3.5)$$

Ez a d alaptávolsággal szerkesztett függvénytáblázathoz tartozó *Newton*-polinom a megadott számközben.

II°. Interpolálás (extrapolálás) ekvidisztáns ordinátákból

Feladat

14. A (2) példában meg vannak adva az x^3 függvény helyettesítési értékei a

$$8; \; 8{,}1; \; 8{,}2; \; \ldots; \; 8{,}5$$

helyeken. Számítsuk ki közelítőleg a függvény helyettesítési értékét a táblázatból a 8,23 helyen, vagyis $8{,}23^3$ közelítő értékét.

A (3.2) alapképletet a függvény helyettesítési értékének kiszámítására olyan helyen kell alkalmazni, amely a kezdőponttól nem az alaptávolság egész számú többszörösével különbözik:

$$8{,}23 = 8{,}2 + 0{,}03 =$$
$$= 8{,}2 + 0{,}3 \cdot d \qquad (d = 0{,}1).$$

Jelölésünk szerint

ha $8{,}2 = x_0, \quad 8{,}3 = x_1, \quad 8{,}4 = x_2, \ldots$

akkor $8{,}2^3 = y_0, \quad 8{,}3^3 = y_1, \quad 8{,}4^3 = y_2, \ldots$

Alkalmazzuk a (3.5) képletet, helyettesítve benne az

$$x = 8{,}23; \quad a = 8{,}2; \quad d = 0{,}1$$

számértékeket:

$$8{,}23^3 \approx y_0 + \binom{0{,}3}{1} \Delta y_0 + \binom{0{,}3}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{0{,}3}{3} \Delta^3 y_0.$$

A magasabbrendű differenciák nullával egyenlők.

$$8{,}23^3 \approx 551{,}368 + 0{,}3 \cdot 20{,}419 + \frac{0{,}3 \cdot (-0{,}7)}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}498 +$$

$$+ \frac{0{,}3 \cdot (-0{,}7) \cdot (-1{,}7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}006$$

$$8{,}23^3 \approx 557{,}442.$$

Pontosan: $8{,}23^3 = 557{,}441767$.)

Az elkövetett hiba becslésére később visszatérünk.

* *

Ha a függvénytáblázat nem valamely polinom értékeit tartalmazza, de mégis megállunk a (3.2) képlet alkalmazásában a k-adrendű differenciáknál, vagyis a $(k+1)$-edrendű differenciákat 0-val helyettesítjük, azt mondjuk, hogy k-adfokúan interpoláltuk a függvényt.

Hogy hányadfokú interpolást célszerű alkalmazni, az a használt táblázattól függ. Az interpolálás fokszámának növelésével a műveleti hiba korlátja nő, a képlethibáé csökken. Megfelelőnek olyan fokú interpolálást lehet tekinteni, amelynél a műveleti hiba korlátja dominál a képlethiba felett úgy, hogy a képlethibát a műveleti hiba mellett el lehet hanyagolni. Hogy ez mikor megengedhető, mikor nem, arra nem lehet egyértelmű választ adni. *Hajós* a hibabecslés alapjairól szóló dolgozatában például helyeselhetőnek tartja azt az álláspontot, hogy tízszeres műveleti hibakorlát mellett a képlethibát elhanyagoljuk, a nagyobb képlethibát pedig már figyelembe vesszük. Ez esetben a műveleti és a képlethiba együttes korlátja általában a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértéke. De nem tartja kifogásolhatónak *Hajós* azt a felfogást sem, hogy a képlethibát nem szorítjuk a műveleti hiba alá. Ebben az esetben a képlethiba a műveleti hiba korlátjának megkétszerezésével vehető figyelembe, tehát az interpolálás eredményében a műveleti és a képlethiba együttes korlátja a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértékének kétszerese. (A későbbiekben az első álláspontra röviden mint „A" álláspontra, a másodikra mint „B" álláspontra utalunk.)

Az „A" álláspontot fogadva el:

Az elsőfokú (lineáris) interpolálás megfelel, ha a másodrendű differenciák abszolút értéke általában kisebb, mint a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértéke.

A másodfokú (kvadratikus) interpolálás megfelel, ha a harmadrendű differenciák abszolút értéke általában kisebb, mint a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértékének kétszerese.

A harmadfokú interpolálás megfelel, ha a negyedrendű differenciák abszolút értéke általában kisebb, mint a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértékének háromszorosa.

A „B“ álláspontot fogadva el:

Az elsőfokú interpolálás akkor felel meg, ha a másodrendű differenciák abszolút értéke általában kisebb, mint a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértékének nyolcszorosa.

A másodfokú interpolálás akkor felel meg, ha a harmadrendű differenciák abszolút értéke általában kisebb, mint a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértékének tizenhatszorosa.

A harmadfokú interpolálás akkor felel meg, ha a negyedrendű differenciák abszolút értéke általában kisebb, mint a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértékének huszonnégyszerese.

A kimondott állításoknak bizonyítására később visszatérünk.

Példa

7. Valamely függvénytáblázatban a kiírt utolsó számjegyek helyértéke 10^{-2}. Az elsőfokú interpolálás az „A“ álláspont figyelembevételével akkor felel meg, ha a másodrendű differenciák abszolút értéke általában kisebb, mint 0,01; a „B“ álláspont figyelembevételével pedig akkor, ha a másodrendű differenciák abszolút értéke általában kisebb, mint 0,08.

Feladatok

15. $y = e^x$ értékei a következő táblázat *a), b), c), d)* rovataiban rendre 2, 3, 4 és tizedesre vannak megadva.

Kiszámítandó $e^{0,573}$ közelítő értéke interpolálással.

Bizonyítsuk be, hogy az „A“ álláspontot fogadva el az *a)* és a *b)* rovatokra a másodfokú interpolálást kell alkalmazni, a *c)* és a *d)* rovatokra még a harmadfokú interpolálás alkalmazása sem megfelelő; a „B“ álláspont mellett az *a)* és *b)* rovatra a lineáris, a *c)* és *d)* rovatra a harmadfokú interpolálást kell alkalmazni.

x	$y = e^x$			
	a	*b*	*c*	*d*
0,5	1,65	1,649	1,6487	1,64872
0,6	1,82	1,822	1,8221	1,82212
0,7	2,01	2,014	2,0138	2,01375
0,8	2,23	2,226	2,2255	2,22554
0,9	2,46	2,460	2,4596	2,45960
1,0	2,72	2,718	2,7183	2,71828

16. Írjuk fel az előbbi feladat *a)* rovatából e^x ötödfokú *Newton*-polinomját (lásd: (3.5) képletet) a (0,5; 1,0) számközben.

$$e^x \approx 1{,}65 + \frac{\Delta y_0}{1}\,\frac{x-0{,}5}{0{,}1} + \frac{\Delta^2 y_0}{2\,!}\,\frac{(x-0{,}5)(x-0{,}6)}{0{,}1^2} +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3\,!}\,\frac{(x-0{,}5)(x-0{,}6)(x-0{,}7)}{0{,}1^3} + \frac{\Delta^4 y_0}{4\,!}\,\frac{(x-0{,}5)\ldots(x-0{,}8)}{0{,}1^4} +$$

$$+ \frac{\Delta^5 y_0}{5\,!}\,\frac{(x-0{,}5)\ldots(x-0{,}9)}{0{,}1^5}.$$

A műveletek elvégzése után e^x keresett ötödfokú *Newton*-polinomja a megadott számközben:

$$-7{,}17 + 59{,}65\,x - 164{,}79\,x^2 + 228{,}78\,x^3 - 155{,}25\,x^4 + 41{,}5\,x^5.$$

Feladatok a (3.3) alapképlet alkalmazására:

17. Számítsuk ki a 6. példában közölt táblázatból $\Delta^4 y_0$ negyedrendű differenciát a közbenső differenciák kiszámítása nélkül ($y_0 = \text{tg } 70°$).

$$\Delta^4 y_0 \approx (E-1)^4 y_0 = \text{tg } 74° - 4\cdot \text{tg } 73° + 6\cdot \text{tg } 72° - 4\cdot \text{tg } 71° + \text{tg } 70°$$

$$\approx 3{,}4874 - 4\cdot 3{,}2709 + 6\cdot 3{,}0777 - 4\cdot 2{,}9042 + 2{,}7475$$

$$\approx 0{,}0007.$$

18. Számítsuk ki $y = \sin x$ alanti 4 ekvidisztáns értékéből a $\Delta^3 y_0$ harmadrendű differenciát a közbenső differenciák kiszámítása nélkül ($y_0 = \sin 0°$).

x	0°	15°	30°	45°
$y = \sin x$	0	0,2588	0,5000	0,7071

$$\Delta^3 y_0 \approx (E-1)^3 y_0 = \sin 45° - 3\sin 30° + 3\sin 15° - \sin 0°$$

$$\approx -0{,}0165.$$

19. Számítsuk ki a következő táblázatból e^x harmadrendű differenciáit (közvetlenül):

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
e^x	1,6487	1,8221	2,0138	2,2255	2,4596	2,7183.

Megoldás:

ha $y_0 = e^{0,5}$, akkor $\Delta^3 y_0 = 0{,}0017$;

ha $y_0 = e^{0,6}$, akkor $\Delta^3 y_0 = 0{,}0024$;

ha $y_0 = e^{0,7}$, akkor $\Delta^3 y_0 = 0{,}0022$.

20. A víz forráspontját (C°) a felszínre nehezedő nyomás (t torr) függvényében a következő táblázat tünteti fel. A táblázat ki van egészítve az első- és másodrendű differenciákkal.

t torr	C°	ΔC°	Δ^2 C°
700	97,71		
		0,39	
710	98,10		0,00
		0,39	
720	98,49		0,00
		0,39	
730	98,88		−0,01
		0,38	
740	99,26		−0,01
		0,37	
750	99,63		0,00
		0,37	
760	100,00		0,00
		0,37	
770	100,37		−0,01
		0,36	
780	100,73		0,00
		0,36	
790	101,09		

Kiszámítandó a víz forráspontja, ha a nyomás 743 torr.

Minthogy a másodrendű differenciák abszolút értéke nem nagyobb, mint 0,01 (az utolsó kiírt számjegy helyértéke), megfelel a lineáris interpolálás („A" álláspont):

$$743 = 740 + 0{,}3 \cdot 10$$

(az alaptávolság $d = 10$)

$$y_{743} = (1 + \Delta)^{0,3}\, y_{740} \approx y_{740} + 0{,}3\, \Delta y_{740}$$

$$\approx 99{,}26 + 0{,}3 \cdot 0{,}37$$

$$\approx 99{,}37\ \text{C}^\circ.$$

21. Egy népességi statisztika adatai szerint az élők száma a

25—29 évesek korcsoportjában 458 572

30—34 évesek korcsoportjában 441 424

35—39 évesek korcsoportjában 423 123

40—44 évesek korcsoportjában 402 918.

Határozzuk meg az élők számát a 32—33 évesek korcsoportjában és a 37—38 évesek korcsoportjában.

Jelölje l_x az x éves élők számát.

$$y_0 = \sum_{x=25}^{29} l_x = 458\,572$$

$$\Delta y_0 = 441\,424$$

$$y_1 = \sum_{x=25}^{34} l_x = 899\,996 \qquad \Delta^2 y_0 = -18\,301$$

$$\Delta y_1 = 423\,123 \qquad \Delta^3 y_0 = -1904$$

$$y_2 = \sum_{x=25}^{39} l_x = 1\,323\,119 \qquad \Delta^2 y_1 = -20\,205$$

$$\Delta y_2 = 402\,918$$

$$y_3 = \sum_{x=25}^{44} l_x = 1\,726\,037$$

$$\sum_{x=25}^{33} l_x = (1+\Delta)^{0,8} y_0$$

$$\sum_{x=32}^{33} l_x = [(1+\Delta)^{0,8} - (1+\Delta)^{0,4}]\, y_0.$$

$$\sum_{x=25}^{31} l_x = (1+\Delta)^{0,4} y_0$$

A 32—33 évesek korcsoportjában élők száma

$$0,4\,\Delta y_0 + 0,04\,\Delta^2 y_0 - 0,032\,\Delta^3 y_0 = 0,4 \cdot 441\,424 - 0,04 \cdot 18\,301 + 0,032 \cdot 1904 = 175\,898.$$

A 37—38 évesek korcsoportjában az élők száma

$$\sum_{x=37}^{38} l_x = [(1+\Delta)^{1,8} - (1+\Delta)^{1,4}]\, y_0$$
$$= 0,4\,\Delta y_0 + 0,44\,\Delta^2 y_0 + 0,008\,\Delta^3 y_0$$
$$= 0,4 \cdot 441\,424 - 0,44 \cdot 18\,301 - 0,008 \cdot 1904$$
$$= 168\,502.$$

Megjegyzés. Az adatokból harmadrendűnél magasabb differenciák nem számíthatók, tehát a harmadiknál magasabb fokban nem lehet interpolálni. A felhasznált harmadrendű differencia azonban — 1904, tehát az interpoláció eredményében az ezresnél kisebb helyértékű számjegyek bizonytalanok.

22. Az ötjegyű (10 alapú) logaritmustáblázatból az alanti mantisszák olvashatók ki.

Számítsuk ki interpolálással lg 3,25 értékét és írjuk fel az alanti táblázatból lg x ötödfokú *Newton*-polinomját.

A differencia táblázat:

x	lg x	Δ lg x	Δ^2 lg x	Δ^3 lg x
3,0	0,47712			
		0,01424		
3,1	0,49136		− 0,00045	
		0,01379		0,00002
3,2	0,50515		− 0,00043	
		0,01336		0,00004
3,3	0,51851		− 0,00039	
		0,01297		0,00001
3,4	0,53148		− 0,00038	
		0,01259		
3,5	0,54407			

Harmadfokú interpolálás megfelel. (Miért?)

$$\lg 3,25 \approx (1+\Delta)^{0,5} \lg 3,2$$
$$\approx \lg 3,2 + 0,5\,\Delta \lg 3,2 - 0,125\,\Delta^2 \lg 3,2 + 0,0625\,\Delta^3 \lg 3,2$$
$$\approx 0,50515 + 0,5 \cdot 0,01336 + 0,125 \cdot 0,00039 + 0,0625 \cdot 0,00001$$
$$\approx 0,51188.$$

23. A ch x függvénytáblázatában, amelyben a függvényértékek 5 értékes jegyre vannak kiírva, a [0; 5] számközre vonatkozó értékek a következők:

x	ch $x = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1,0000					
		0,5431				
1	1,5431		1,6760			
		2,2191		2,4107		
2	3,7622		4,0867		4,4368	
		6,3058		6,8475		7,4435
3	10,068		10,9342		11,8803	
		17,240		18,7278		
4	27,308		29,662			
		46,902				
5	74,210					

Írjuk fel ezekből az értékekből a függvény [0; 5] számközhöz tartozó *Newton*-polinomját, és számítsuk ki belőle (*Horner* elrendezésével) ch 3,3 értékét.

A *Newton*-polinom a (3.4) képlet szerint

$$p(x) = 1 + 0{,}5431\,x + \frac{1{,}6760}{2\,!}\,x(x-1) + \frac{2{,}4107}{6}\,x(x-1)(x-2) +$$

$$+ \frac{4{,}4368}{24}\,x(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{7{,}4435}{120}\,x(x-1)\ldots(x-4) =$$

$$= 1 + 0{,}8873\,x - 1{,}4335\,x^2 + 1{,}4624\,x^3 - 0{,}4351\,x^4 + 0{,}0620\,x^5.$$

Ebből:

$$\text{ch}\,3{,}3 \approx 13{,}5374.$$

A 4 tizedesre pontos érték helyesen ch 3,3 $\approx$ 13,5748 már a második tizedesben eltér. Az ötödfokú interpolálás nem megfelelő. Magasabbrendű differenciák azonban a rendelkezésre álló értéksorozatból nem számíthatók ki.

III^b. Interpolálás, ha a változó értékei nem ekvidisztáns számok.

Feladat

24. Az $y = f(x)$ függvény értékei a változó

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

értékeire vannak megadva:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

(A változó értékeit többnyire monoton növekvő sorrendben rendezzük, de ez nem lényeges kikötés.)

Állítsuk elő azt az n-edfokú polinomot, amely az adott helyeken az adott értékeket veszi fel.

Definiáljuk az első- és magasabbrendű *osztott differenciákat*.

Az $f(x)$ függvény elsőrendű osztott differenciája az

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

másodrendű osztott differenciája az

$$f_2(x) = \frac{f_1(x) - f_1(x_1)}{x - x_1},$$

n-edrendű osztott differenciája az

$$f_n(x) = \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x_{n-1})}{x - x_{n-1}} \text{ tört függvény.}$$

Ezekkel az osztott differenciákkal a feladatot megoldó *Newton*-polinom az $[x_0, x_n]$ számközre a következő képlettel adható meg:

$$p(x) = f(x_0) + f_1(x_1)(x - x_0) + f_2(x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f_n(x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \qquad (3.6)$$

A $p(x)$ polinomban x helyébe rendre az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ értékeket helyettesítve $y_0, y_1, \ldots y_n$ helyettesítési értékeket kapunk, amivel a képlet igazolva van.

Az $f(x_0)$; $f_1(x_1)$; $f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$ együtthatókat gépiesen a következő séma szerint számítjuk ki:

Betűkkel (vízszintes, nem átlós elrendezésben)

x_0	y_0				
x_1	y_1	$f_1(x_1)$			
x_2	y_2	$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$		
.	.				
.	.				
x_n	y_n	$f_1(x_n)$	$f_2(x_n)$	...	$f_n(x_n)$.

Példa

8. Határozzuk meg a harmadfokú *Newton*-polinomot a következő táblázat első két rovatában megadott értékpárokból:

x	$y=f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
−2	1			
0	−4	−2,5		
3	7	1,2	1,233	
10	0	−0,0833	0,2417	− 0,1416

Feladat

25. Igazoljuk, hogy a (3.6) képletből megkapjuk a (3.5) képletet, ha

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + d, \quad x_2 = a + 2d, \ldots, x_n = a + nd.$$

c) Hibabecslés a differenciaszámításnál

Az $f(x)$ függvénynek az $(a, a + nd)$ számközhöz tartozó n-edfokú *Newton*-polinomját a (3.5) képlet határozza meg. Ha az $f(x)$ függvény maga is n-edfokú polinom, akkor azonos a (3.5) képlet által meghatározott polinommal, más szóval az $f(x)$ minden helyen megegyezik a *Newton*-polinom helyettesítési értékével. Más esetben az x helytől függő $h(x)$ képlethibát követünk el, ha az $f(x)$ függvény értékét a $p(x)$ *Newton*-polinom értékével helyettesítjük. Ez a képlethiba kifejezhető a

$$h(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)(x-a-d)\ldots(x-a-nd)f^{(n+1)}(t) \tag{3.7}$$

alakban, ha az $f(x)$ függvény az $(a, a + nd)$ számközben $(n + 1)$-szer folytonosan differenciálható függvény. A (3.7) képletben t az $(a, a + nd)$ számköz valamely helyét jelenti. Ez állítás bizonyítása az analízis legtöbb tankönyvében megtalálható.

Megjegyzés. A műszaki feladatokban előforduló $f(x)$ függvényekről — ritka kivételektől eltekintve — a vizsgált számközökben feltételezzük, hogy akárhányszor folytonosan differenciálható függvények; akkor is, ha a függvényekről csak empirikus táblázatok állnak rendelkezésünkre. Ekkor fennáll az n-edrendű differenciára, hogy:

$$\frac{\Delta^n y_0}{d^n} \to f^{(n)}(a), \qquad \text{ha} \qquad d \to 0.$$

Lineáris interpolálásnál

$$|h(x)| \leq \frac{|(x-a)(x-a-d)|}{2} M_2,$$

ahol M_2 jelenti az $|f''(t)|$ maximumát az $(a, a + d)$ számközben. Mivel

$$|(x-a)(x-a-d)|$$

maximuma az $(a, a + d)$ számközben $= \frac{d^2}{4}$, a hibát a lineáris interpolálásnál a következő képletből becsüljük

$$|h(x)| \leq \frac{d^2}{8} \cdot M_2.$$

Mivel pedig $f''(x) \cdot d^2 \approx \Delta^2 y_0$, a hiba abszolút értékének felső korlátja közelítőleg

$$\frac{\Delta^2 y_0}{8}.$$

A hiba általában kisebb ennél a felső korlátnál.

A mondottakkal igazoltuk a 14. feladat után bizonyítás nélkül megadott szabályt. Ha ugyanis a másodrendű differenciák abszolút értékben nem nagyobbak, mint a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértéke, illetve ennek a helyértéknek 8-szorosa, a lineáris interpolálás megfelel az „A", illetve a „B" álláspont követelményének.

Másodrendű interpolálásnál a meggondolás hasonló. A hiba abszolút értékének felső korlátja közelítőleg

$$\frac{\Delta^3 y_0}{9\sqrt{3}} \approx 0{,}065\, \Delta^3 y_0.$$

Ha tehát a harmadrendű differenciák nem haladják meg a táblázatban kiírt utolsó számjegy helyértékének 2-szeresét, illetve 16-szorosát, a kvadratikus interpolálás megfelel az „A", illetve a „B" álláspont követelményének.

Hasonlóan bizonyítható a harmadfokú interpolálásra vonatkozó szabály.

Ha a *Newton*-polinomot a nem ekvidisztáns

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

abszcisszákhoz tartozó

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$$

ordinátákból szerkesztjük, a hibát a következő képlet fejezi ki:

$$h(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) \cdot f^{(n+1)}(t),$$

ahol t valamely helyet jelent az $x_0, x_1, \ldots x_n$ pontokat tartalmazó legkisebb számközben.

Feladatok

26. Az ötjegyű logaritmustáblázatból az

$$1000 \leqq x \leqq 10\,000$$

számközbe eső egész számok 10 alapú logaritmusainak mantisszái 5 értékes jegyre olvashatók ki. Az egyenlőközű abszcisszák különbsége (az alaptávolság) $d = 1$.

Kielégíti a táblázat igényét a lineáris interpolálás?

Útmutatás:

$$y = \lg x; \qquad |y''| = \frac{\lg e}{x^2} \approx \frac{0{,}43429}{x^2}$$

$$|h(x)| < \frac{0{,}44}{8x^2} = \frac{0{,}055}{x^2}.$$

A hiba abszolút értéke legnagyobb az (1000, 1001) számközben, ahol $\leq 0{,}055 \cdot 10^{-6}$. tehát a lineáris interpolálás hibája abszolút értékben nem haladja meg $6 \cdot 10^{-8}$-at. Ez a megkívántnál nagyobb pontosság.

Megjegyzés: A lineáris interpolálás kisebb hibakorlátja dacára sem lehetnek a logaritmustáblázat interpolált értékei pontosabbak, mint a táblázatban kiírt értékek (az örökölt hiba következtében).

27. A természetes (*e* alapú) logaritmusok valamely táblázatában az egész számok logaritmusai 1-től 1000-ig az ötödik tizedes jegyre pontosan vannak megadva (hibakorlát $5 \cdot 10^{-6}$). Mely számközben kielégítő a lineáris interpolálás, és mely számközben kell magasabb fokban interpolálni?

Útmutatás:

$$\text{alaptávolság } d = 1. \qquad |y''| = \frac{1}{x^2}, \text{ tehát}$$

$$|h(x)| \leq \frac{1}{8x^2}.$$

Hogy a hibakorlát ne legyen nagyobb („A") 10^{-6}-nál, illetve („B") 10^{-5}-nél, kell, hogy

$$(\text{„A"})\ x \geqq 354; \text{ illetve } (\text{„B"})\ x \geqq 112.$$

Másodfokú interpolálásnál $|h(x)| \leqq 0{,}065 \dfrac{2}{x^3}$. Hogy a hibakorlát ne legyen nagyobb mint

$$(\text{„A"})\ 10^{-6}, \text{ kell hogy } x \geqq 51;$$

illetve

$$(\text{„B"})\ 10^{-5}, \text{ kell, hogy } x \geqq 24.$$

28. Az egész számok négyzetgyökeinek valamely táblázatában a négyzetgyökök négy tizedesig vannak megadva (hibakorlát $5 \cdot 10^{-5}$). Mely számszakaszban kielégítő a lineáris interpolálás?

Az előbbi két feladat útmutatása szerint megállapítható, hogy a lineáris interpolálás kielégítő,

$$(\text{„A"}) \text{ ha } x \geqq 214;$$

$$(\text{„B"}) \text{ ha } x \geqq 46.$$

29. Adva van a következő értéktáblázat.

x	0°	15°	30°	45°
$\sin x$	0,0000	0,2588	0,5000	0,7071

Írjuk fel $\sin x$ harmadfokú *Newton*-polinomját a (0, 45°) számközben. Becsüljük meg a hibát.

A polinomot vagy a (3.4) vagy a (3.6) képlet alkalmazásával kapjuk.

Jelöljük 15° ívmértékét ($\approx$ 0,2618) röviden r-rel. A hiba

$$h(x) = \frac{1}{24} x (x - r)(x - 2r)(x - 3r) \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 3r).$$

A $(0, 3r)$ számközben

$$\sin t \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Helyettesítsünk $h(x)$-ben x helyébe $\left(u + \frac{3r}{2}\right)$-t:

$$\left(u + \frac{3r}{2}\right)\left(u + \frac{r}{2}\right)\left(u - \frac{r}{2}\right)\left(u - \frac{3r}{2}\right) = \left(u^2 - \frac{9r^2}{4}\right)\left(u^2 - \frac{r^2}{4}\right)$$

maximumát az $u = 0$ helyen veszi fel. A maximum $\frac{9r^4}{16}$:

$$|h(x)| \leqq \frac{1}{24} \frac{9r^4}{16} \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 10^{-4}.$$

Az első három tizedest tehát az interpolálás képlethibája nem érinti.

d) Empirikus függvények differenciálhányadosainak közelítő kiszámítása haladó differenciákkal (Numerikus differenciálás)

Feladat

30. Adva van egy empirikus függvény ekvidisztáns értékeinek sorozata:

x	a	$a + d$	$a + 2d$	$a + 3d \dots$
y	$y_0 = f(a)$	$y_1 = f(a + d)$	$y_2 = f(a + 2d)$	$y_3 = f(a + 3d) \dots$

Számítsuk ki a függvény differenciálhányadosának közelítő értékét az $x = a$ helyen.

A (3.5) interpoláló képlet szerint az x helyen a függvény értéke közelítőleg egyenlő a $p(x)$ *Newton*-polinom értékével:

$$f(x) \approx p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,d}(x - a) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,d^2}(x - a)(x - a - d) + \dots$$

$$= y_0 + \frac{x - a}{d}\left\{\frac{\Delta y_0}{1!} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,d}(x - a - d) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,d^2}(x - a - d)(x - a - 2d) + \dots\right\}.$$

A jobb oldalon tagonként differenciálva, és azután x helyébe a-t helyettesítve kapjuk $f'(a)$ közelítő értékét a haladó differenciákkal kifejezve:

$$f'(a) \approx \frac{1}{d}\left\{\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \dots\right\} \tag{3.8}$$

Ha a (3.8) képletet polinomra alkalmazzuk, a jobb oldal véges számú tagból áll, a képlet pontos. Ha a függvény nem polinom, és a sort az n-edik tag után megszakítjuk (a magasabbrendű differenciákat 0-val helyettesítjük), a képlet közelítő értéket ad. amelynek hibáját becsülni kell.

Példák

9. Számítsuk ki az $y = f(x)$ függvény differenciálhányadosát az $x = 6$ helyen a következő értéktáblázatból ($d = 0{,}5$).

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
4,5	9,69				
		3,21			
5,0	12,90		0,60		
		3,81		0,06	
5,5	16,71		0,66		0,00
		4,47		0,06	
6,0	21,18		0,72		0,00
		5,19		0,06	
6,5	26,37		0,78		0,00
		5,97		0,06	
7,0	32,34		0,84		
		6,81			
7,5	39,15				

$$f'(6) = \frac{1}{0{,}5}\left\{5{,}19 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}78 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}06\right\} = 9{,}64.$$

(A táblázat az $y = 0{,}08\,x^3 + x - 2{,}1$ polinom értéktáblázata. A differenciálhányados az $x = 6$ helyen pontosan 9,64.)

10. Számítsuk ki a differenciálhatónak feltételezett $y = f(x)$ függvény differenciálhányadosát az $x = 3$ helyen a következő empirikus táblázatból ($d = 1$).

x	y	$10^5 \cdot \Delta y$	$10^5 \cdot \Delta^2 y$	$10^5 \cdot \Delta^3 y$	$10^5 \cdot \Delta^4 y$
0	6,98970				
		41393			
1	7,40363		−3605		
		37788		579	
2	7,78151		−3026		−130
		34762		449	
3	8,12913		−2577		− 94
		32185		355	
4	8,45098		−2222		− 67
		29963		288	
5	8,75061		−1934		
		28029			
6	9,03090				

$$f'(3) \approx 10^{-5}\left\{32185 + \frac{1}{2}\cdot 2222 + \frac{1}{3}\cdot 288\right\} = 0{,}33392.$$

* * *

A (3.8) képletben az $f(x)$ első differenciálhányadosát a függvény haladó differenciáival fejeztük ki. Ezt a képletet a (3.5) interpoláló képletből nyertük differenciálással. Kétszeri, háromszori stb. differenciálással a (3.5) képletből az $f(x)$ függvény második, harmadik stb. differenciálhányadosát is kiszámíthatjuk.

Többet nyújt ennél a módszernél a szimbolikus számítás módszere. Jelöljük röviden x-szel az $(a + kd)$ helyet, amelyen az $y = f(x)$ függvény differenciálhányadosait ki akarjuk számítani:

$$x = a + kd.$$

Feltesszük, hogy e hely környezetében a függvény *Taylor*-sorba fejthető:

$$f(x + d) = f(x) + f'(x)\,d + \frac{f''(x)}{2}\,d^2 + \dots$$

A differenciálhányados képzésének D szimbolumát használva, ezt a kifejtést a következő alakban írhatjuk:

$$y_{k+1} = y_k + d \cdot Dy_k + \frac{d^2}{2} D^2 y_k + \ldots$$

Szimbolikusan:

$$y_{k+1} = \left\{ 1 + d \cdot D + \frac{d^2D^2}{2} + \frac{d^3D^3}{6} + \ldots \right\} y_k = e^{dD} y_k,$$

ahonnan

$$\Delta y_k = \{ e^{dD} - 1 \} \, y_k,$$

rövidebben

$$\Delta = e^{dD} - 1 \qquad \text{vagy} \qquad d\,D = \ln(1 + \Delta) \qquad (3.9)$$

Képleteinket hatványozva:

$$\Delta^2 = (e^{dD} - 1)^2 \qquad \text{és} \qquad d^2D^2 = \{\ln(1 + \Delta)\}^2$$
$$\Delta^3 = (e^{dD} - 1)^3 \qquad \text{és} \qquad d^3D^3 = \{\ln(1 + \Delta)\}^3 \qquad (3.10)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

A (3.9) képletek közül a jobboldali — a logaritmust hatványsorba fejtve — újból megadja a már más módon levezetett (3.8) képletet. Ugyanebből a képletből hatványozás által nyert kifejtések pedig már új képletekre vezetnek, és kifejezik a magasabb rendű differenciálhányadosokat a magasabb rendű differenciákkal:

$$\left.\begin{aligned} d^2D^2 &= \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \ldots \\ d^3D^3 &= \Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4 + \frac{7}{4}\Delta^5 - \ldots \\ d^4D^4 &= \Delta^4 - 2\Delta^5 + \frac{17}{6}\Delta^6 - \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

Ha pedig a (3.10) képletek közül a bal oldaliakat fejtjük ki, akkor a magasabb rendű differenciákat kapjuk kifejezve a magasabb rendű differenciálhányadosokkal:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= d\,D + \frac{d^2D^2}{2} + \frac{d^3D^3}{6} + \frac{d^4D^4}{24} + \ldots \\ \Delta^2 &= d^2D^2 + d^3D^3 + \frac{7}{12} d^4D^4 + \ldots \\ \Delta^3 &= d^3D^3 + \frac{3}{2} d^4D^4 + \frac{5}{4} d^5D^5 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

Fejezzük ki a (3.12) egyenletekből az $f(x)$ függvény differenciálhányadosait. Az elsőből

$$D = \frac{\Delta}{d} - d\left\{\frac{D^2}{2} + \frac{d\,D^3}{6} + \frac{d^2D^4}{24} + \dots\right\}$$

másképpen

$$y' = \frac{\Delta y}{d} - d\left\{\frac{y''}{2} + \frac{d\,y'''}{6} + \frac{d^2y^{(4)}}{24} + \dots\right\}$$

A másodikból

$$y'' = \frac{\Delta^2 y}{d^2} - d\left\{y''' + \frac{7}{12}\,d\,y^{(4)} + \dots\right\} \qquad (3.13)$$

A harmadikból

$$y''' = \frac{\Delta^3 y}{d^3} - d\left\{\frac{3}{2}\,y^{(4)} + \frac{5}{4}\,d\,y^{(5)} + \dots\right\}$$

A (3.13) képletek mutatják, hogy ha az $y^{(n)}$ differenciálhányadost a

$$\frac{\Delta^n y}{d^n}$$

törttel helyettesítjük, az elkövetett hiba d-vel, az alaptávolság hosszával egyenlő rendben válik kicsinnyé. Más szövegezésben: a hiba d-vel osztva is véges korlát alatt marad, ha d zérushoz tart. Szokásos jelölésben: a hiba $O(d)$.

Ha jobb közelítéssel akarjuk a differenciálhányadosokat a differenciahányadosokból kiszámítani, a kifejtésben a következő magasabb rendű differenciát is figyelembe kell vennünk.

A (3.12) egyenletek közül az első kettőből kiküszöböljük a d^2D^2-et tartalmazó tagokat:

$$\Delta - \frac{\Delta^2}{2} = d\,D - \frac{1}{3}\,d^3D^3 - \frac{1}{4}\,d^4D^4 - \dots$$

és innen

$$D = \frac{2\,\Delta - \Delta^2}{2\,d} + d^2\left\{\frac{1}{3}D^3 + \frac{1}{4}\,d\,D^4 + \dots\right\} \qquad (3.14)$$

Ez a képlet azt mondja, hogy ha az első differenciálhányadost pl. az $x = a$ helyen a

$$\frac{(2\,\Delta - \Delta^2)\,y_0}{2\,d} = \frac{-\,y_2 + 4\,y_1 - 3\,y_0}{2\,d}$$

törttel helyettesítjük, a hiba nagyságrendben: $O(d^2)$.

Hasonlóan kapjuk a (3.12) egyenletek közül a második és a harmadik felhasználásával:

$$\Delta^2 - \Delta^3 = d^2D^2 - \frac{11}{12}\,d^4\,D^4 - \dots$$

és innen

$$D^2 = \frac{\Delta^2 - \Delta^3}{d^2} + d^2 \left\{\frac{11}{12} D^4 + \ldots\right\} \tag{3.15}$$

vagyis a második differenciálhányadost pl. az $x = a$ helyen a

$$\frac{(\Delta^2 - \Delta^3)\, y_0}{d^2} = \frac{-y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0}{d^2}$$

törttel helyettesítve az elkövetett hiba nagyságrendben: $O(d^2)$.

Ugyanígy folytatva d^2 nagyságrendű hibával kaphatjuk lépésről lépésre a magasabb rendű differenciálhányadosok kifejezéseit a magasabb rendű differenciák segítségével, mégpedig az n-edik differenciálhányadost az n-edik és az $(n + 1)$-edik differenciák felhasználásával.

e) Retrográd differenciák[1]

Az $f(x)$ függvény retrográd differenciája, jelben

$$\boxed{R\, f(a) = f(a) - f(a - d)} \tag{3.16}$$

nem más, mint az $a - d$ helyhez tartozó haladó differencia. A kapcsolat a haladó és a retrográd differencia között szimbolikusan is felírható:

$$RE\, f(a) = R\, f(a + d) = f(a + d) - f(a) = \Delta\, f(a).$$

Rövidebben

$$RE = \Delta,$$

vagy

$$R = \frac{\Delta}{E} = \frac{E - 1}{E} = 1 - \frac{1}{E}.$$

Ez az egyenlet meghatározza az E negatív kitevőjű hatványainak értelmezését:

$$E^{-1} = \frac{1}{E} = 1 - R, \quad \text{illetve} \quad E^{-1} f = f(a - d) = y_{-1},$$

és tovább

$$E^{-n} f = f(a - nd) = y_{-n}.$$

A felírt kapcsolatot alkalmazva, kapjuk, hogy

$$E^{-n} = (1 - R)^n.$$

Részletesen kiírva kapjuk a retrográd differenciákkal való számolás alapképletét, mely a haladó differenciákkal való számolás (3.2) alapképletének felel meg:

$$\boxed{y_{-n} = y_0 - \binom{n}{1} R y_0 + \binom{n}{2} R^2 y_0 - \ldots + (-1)^n R^n y_0.} \tag{3.17}$$

[1] Ennek a fejezetnek a tartalmát a haladó differenciákra (3. § *b)*) vonatkozó tételekből is le lehet vezetni, ha azokat az $f(x)$ függvény helyett az $f(-y) = g(y)$ függvényre alkalmazzuk.

Ebben a képletben R^2y_0 a másodrendű, R^ny_0 az n-edrendű retrográd differenciát jelenti. Pl.:

$$R^2y_0 = R(y_0 - y_{-1}) = y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}.$$

A haladó differenciákkal való számolás (3.3) alapképletének megfelelő képletet a retrográd differenciákra hasonlóan kapjuk, ha az

$$R = 1 - E^{-1}$$

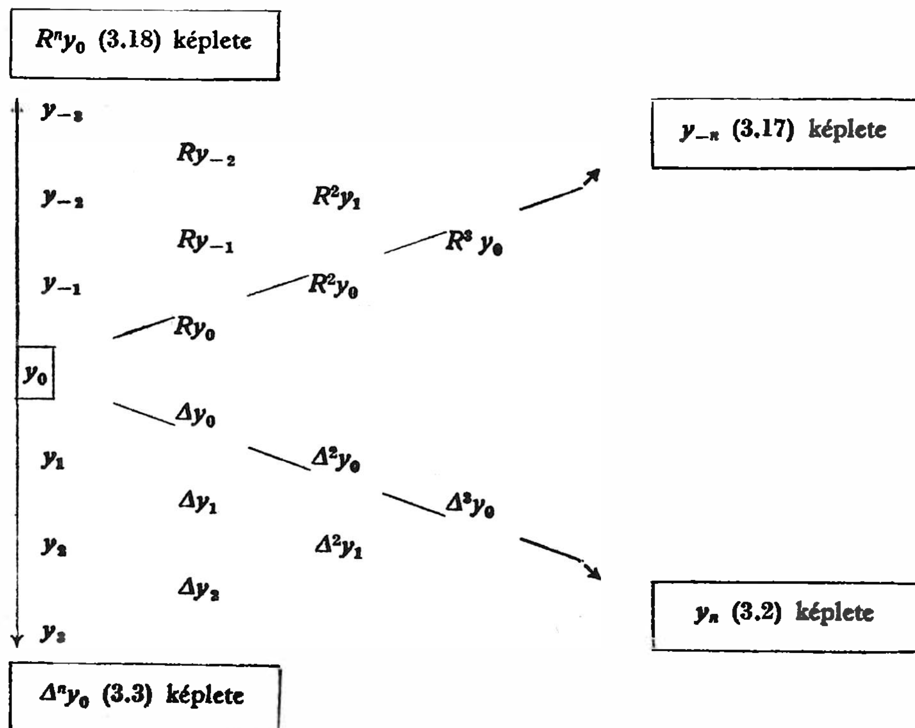
szimbolikus egyenletből származó

$$R^n = (1 - E^{-1})^n$$

egyenletet részletesen kiírjuk:

$$R^ny_0 = y_0 - \binom{n}{1}y_{-1} + \binom{n}{2}y_{-2} - \ldots + (-1)^n y_{-n} \tag{3.18}$$

A haladó differenciákkal való számolás (3.2) és (3.3) alapképletének, valamint a retrográd differenciákkal való számolás (3.17) és (3.18) alapképletének szemléltetésére szolgál a következő ábra:



Az ábrába behúzott vonalak azokon az elemeken haladnak át, amelyek a vonalak végén jelzett képletekben szerepelnek. Látjuk, hogy mely táblázati értékek ismeretében kell a haladó vagy a retrográd differenciák képleteit alkalmazni.

Példa

11. Adva van a következő függvénytáblázat:

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	12	12	6	0	0	12	42

Számítsuk ki a (3.17) képlet alkalmazásával $f(1)$ értékét. Alaptávolság: $d = 1$; $y_0 = f(6)$; $f(1) = f(6 - 5d) = y_{-5}$

$$f(1) = y_{-5} = (1 - R)^5 y_0 = y_0 - 5Ry_0 + 10R^2y_0 - 10R^3y_0 + 5R^4y_0 - R^5y_0.$$

A differenciatáblázat:

x	y	Ry	R^2y	R^3y	R^4y
1					
2					
3	12				0
		0		6	
4	12		−6		0
		−6		6	
5	6		0		0
		−6		6	
6	0		6		0
		0		6	
7	0		12		0
		12		6	
8	12		18		
		30			
9	42				

$$f(1) = y_{-5} = 0 - 5(-6) + 10 \cdot 0 - 10 \cdot 6 = 30 - 60 = -30.$$

A retrográd differenciákkal való számolás alapképleteit hasonló meggondolásokkal alkalmazhatjuk feladatok megoldására, mint a haladó differenciákra vonatkozó megfelelő képleteket. Így kapjuk a 13. feladat megfelelőjét:

Feladat

31. Egy függvénytáblázatban meg vannak adva az $y = f(x)$ függvény értékei az ekvidisztáns

$$x = a, \quad a - d, \quad a - 2d, \ldots, a - nd \text{ helyeken:}$$

$$y = y_0, \quad y_{-1}, \quad y_{-2}, \quad \ldots, y_{-n}.$$

Írjuk fel a $p(x)$ n-edfokú polinomot, amely a megadott helyeken az $f(x)$ függvény megadott értékeit veszi fel:

$$p(x) = y_0 + \frac{Ry_0}{1!}\frac{x-a}{d} + \frac{R^2y_0}{2!}\frac{(x-a)(x-a+d)}{d^2} + \ldots + \frac{R^ny_0}{n!}\frac{(x-a)(x-a+d)\ldots(x-a+nd-d)}{d^n} \qquad (3.19)$$

Ez a d alaptávolsággal szerkesztett függvénytáblázathoz tartozó *Newton*-plinom retrográd differenciákkal.

Ezzel a (3.19) képlettel interpolálhatunk magasabb fokban retrográd differenciák segítségével.

Példa

12. Számítsuk ki az 5. példában közölt táblázatból a 106 C°-nak megfelelő $p(106)$ gáznyomást harmadfokú interpolálással haladó és retrográd differenciákból a (3.2) és a (3.17) alapképletek alkalmazásával.

Haladó differenciákkal:

$t_0 = 105$ C°; alaptávolság $d = 5$ C°; $p_0 = 3{,}51$ kg/cm²;

$$106\text{ C}° = 105\text{ C}° + 0{,}2 \cdot d.$$

$$p(106) \approx (1+\Delta)^{0,2}p_0 = p_0 + 0{,}2\Delta p_0 + \binom{0{,}2}{2}\Delta^2 p_0 + \binom{0{,}2}{3}\Delta^3 p_0 \approx$$

$$\approx 3{,}51 + 0{,}2 \cdot 0{,}65 - 0{,}08 \cdot 0{,}10 + 0{,}048 \cdot 0{,}01 = 3{,}63\text{ kg/cm}^2.$$

Retrográd differenciákkal:

$t_0 = 110$ C°; alaptávolság $d = 5$ C°; $p_0 = 4{,}16$ kg/cm²;

$$106\text{ C}° = 110° - 0{,}8 \cdot d.$$

$$p(106) \approx (1-R)^{0,8}p_0 = p_0 - 0{,}8 \cdot R\,p_0 + \binom{0{,}8}{2}R_2 p_0 - \binom{0{,}8}{3}R^3 p_0 \approx$$

$$\approx 4{,}16 - 0{,}8 \cdot 0{,}65 - 0{,}08 \cdot 0{,}08 = 3{,}63\text{ kg/cm}^2.$$

* * *

A (3.19) képletből kapjuk differenciálással a (3.8) képletnek megfelelő következő képletet, amely a differenciálhányados közelítő értékét a retrográd differenciákkal fejezi ki:

$$f'(a) = \frac{1}{d}\left\{Ry_0 + \frac{1}{2}R^2y_0 + \frac{1}{3}R^3y_0 + \ldots\right\} \qquad (3.20)$$

Kiindulva a könnyen belátható

$$R = 1 - e^{-dD} \qquad (3.21)$$

szimbolikus egyenletből, a szimbolikus számítás módszerével kapjuk a (3.9)—(3.15) képletekhez analog képleteket, amelyekben a differenciálhányadosok a haladó differenciák helyett a retrográd differenciákkal vannak kifejezve. Például

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{Ry}{d} + d\left\{\frac{y''}{2} - \frac{dy'''}{6} + \frac{d^2\,y^{(4)}}{24} - \ldots\right\} \\ y'' &= \frac{R^2y}{d^2} + d\left\{y''' - \frac{7}{12}d\,y^{(4)} + \ldots\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

vagy $O(d^2)$ hibával:

$$\left.\begin{aligned} y' &\approx \frac{(2R + R^2)\,y_0}{2d} = \frac{3y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}}{2d} \\ y'' &\approx \frac{(R^2 + R^3)\,y_0}{d^2} = \frac{2y_0 - 5y_{-1} + 4y_{-2} - y_{-3}}{d^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3.23)$$

Feladatok

32. Számítsuk ki a következő függvénytáblázatból

x	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5
y	9,69	12,90	16,71	21,18	26,37	32,34	39,15

a függvény differenciálhányadosát az $x = 6$ helyen haladó és retrográd differenciákkal.

A differenciatáblázat:

4,5	9,69				
		3,21			
5,0	12,90		0,60		
		3,81		0,06	
5,5	16,71		0,66		0
		4,47		0,06	
6,0	21,18		0,72		0
		5,19		0,06	
6,5	26,37		0,78		0
		5,97		0,06	
7,0	32,34		0,84		
		6,81			
7,5	39,15				

$$f'(6) = \frac{1}{0{,}5}\left\{4{,}47 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}66 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}06\right\} = 9{,}64.$$

$$f'(6) = \frac{1}{0{,}5}\left\{5{,}19 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}78 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}06\right\} = 9{,}64.$$

33. Számítsuk ki $f'(3)$ közelítő értékét haladó és retrográd differenciákkal a következő függvénytáblázatból:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	6,98970	7,40363	7,78151	8,12913	8,45098	8,75061	9,03090

$f'(3) = 0{,}33392$ haladó differenciákkal

$f'(3) = 0{,}33542$ retrográd differenciákkal

f) Empirikus függvények differenciálhányadosának közelítő kiszámítása vegyesen: haladó és retrográd differenciákkal

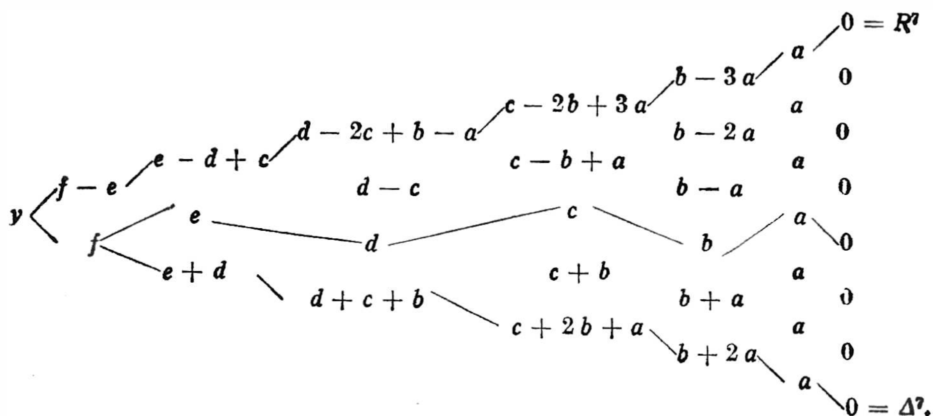
Jól használható közelítő képletre vezet az a feltevés, hogy a függvény ekvidisztáns értékeinek hetedrendű differenciái 0-val egyenlők. Ez a feltevés 6-nál nem magasabb rendű polinomokra áll. Más függvényekre nézve annyit jelent, hogy azokat hatodfokú polinomokkal helyettesítjük. Ez a feltevés olyan közelítő képletre vezet, amelyben harmadiknál magasabb rendű differenciák már nem fordulnak elő. Előnye tehát az is, hogy már kevés értékből álló táblázatra is alkalmazható.

Szerkesszük meg a differenciák táblázatát a hetedrendű differenciákból visszafelé. Az $f(x)$ sorában és az alatta álló sorban álló értékeket rendre

$$0,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

betűkkel jelöljük:

$$f(x) \searrow f \nearrow e \searrow d \nearrow c \searrow b \nearrow a \searrow 0$$



A táblázatból kiolvashatók a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} R^7 + \Delta^7 &= 0 \\ R^6 - \Delta^6 &= 0 \\ R^5 + \Delta^5 &= 2b - a \\ R^4 - \Delta^4 &= -2(2b - a) \\ R^3 + \Delta^3 &= 2d - c + 2b - a \\ R^2 - \Delta^2 &= -(2d - c). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ezekből az egyenletekből a negyedrendű és ötödrendű differenciák az alacsonyabb rendűekkel kifejezhetők:

$$R^4 - \Delta^4 = -2[R^3 + \Delta^3 + R^2 - \Delta^2] \tag{3.25}$$

$$R^5 + \Delta^5 = R^3 + \Delta^3 + R^2 - \Delta^2.$$

A differenciálhányados közelítő kiszámítására a haladó differenciákból a (3.8) képlet, a retrográd differenciákból a (3.20) képlet szolgál. Kombináljuk a két képletet összeadással, és vegyük tekintetbe, hogy a hetedrendű (és tehát a magasabb rendű) differenciák 0-val egyenlők. Jelöljük a táblázat alaptávolságát h-val, mert a fenti egyenletekben a d betű jelentése másként van lefoglalva. Akkor

$$hf' = \frac{R + \Delta}{2} + \frac{R^2 - \Delta^2}{4} + \frac{R^3 + \Delta^3}{6} + \frac{R^4 - \Delta^4}{8} + \frac{R^5 + \Delta^5}{10}$$

$$(R^6 - \Delta^6 = R^7 + \Delta^7 = 0).$$

Figyelembe véve a (3.24) és (3.25) egyenleteket

$$hf' = \frac{R + \Delta}{2} + \frac{R^2 - \Delta^2}{10} + \frac{R^3 + \Delta^3}{60} \tag{3.26}$$

A második differenciálhányados kiszámításához a táblázat a következő egyenleteket szolgáltatja:

$$\begin{aligned} R^6 + \Delta^6 &= 2a \\ R^5 - \Delta^5 &= -5a \end{aligned}$$

$$R^4 + \Delta^4 = 2c + 4a$$
$$R^3 - \Delta^3 = -3c - a$$
$$R^2 + \Delta^2 = 2e + c$$
$$R - \Delta = -e.$$

Hasonló meggondolással és számítással, mint az első, a második differenciálhányados közelítő értéke is kiszámítható a haladó differenciákkal, a retrográd differenciákkal és — ha a hetedrendű differenciálhányadosokról feltételezzük, hogy 0-val egyenlők — vegyesen a kétféle differenciákkal. Csak a képleteket közöljük:

$$h^2 f'' = \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6 - \dots$$

$$h^2 f'' = R^2 + R^3 + \frac{11}{12}R^4 + \frac{5}{6}R^5 + \frac{137}{180}R^6 + \dots \qquad (3.27)$$

$$h^2 f'' = -\frac{37}{30}(R - \Delta) - \frac{7}{60}(R^2 + \Delta^2) - \frac{1}{90}(R^3 - \Delta^3).$$

g) Gauss, Stirling, Bessel képletei

A *Newton*-polinomot sok feladatban előnyösebb úgy alkalmazni interpolálásra, hogy az argumentum ekvidisztáns értékeit nem növekedő sorrendben rendezzük, hanem egy centrális értékre szimmetrikusan. Akkor a táblázat, amelyből az interpolált értéket akarjuk kiszámítani, a következő alakban jelentkezik (kiegészítve az osztott differenciák rovataival).

a	$f(a)$			
$a+d$	$f(a+d)$	$\frac{1}{d}\Delta f(a)$		
$a-d$	$f(a-d)$	$\frac{1}{d}\Delta f(a-d)$	$\frac{1}{2d^2}\Delta^2 f(a-d)$	
$a+2d$	$f(a+2d)$	$\frac{1}{2d}[\Delta f(a) + \Delta f(a+d)]$	$\frac{1}{2d^2}\Delta^2 f(a)$	$\frac{1}{2\cdot 3d^3}\Delta^3 f(a-d)$
$a-2d$	$f(a-2d)$	$\frac{1}{2d}[\Delta f(a-d) + \Delta f(a-2d)]$		
.	.			
.	.			

A *Newton*-polinom a fenti táblázatból

$$p(x) = f(a) + \frac{x-a}{d}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-d)}{2d^2}\Delta^2 f(a-d) +$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-d)(x-a+d)}{2\cdot 3d^3}\Delta^3 f(a-d) + \dots$$

Ha x helyébe $(a + t\,d)$-t helyettesítünk, akkor a képlet alakja:

$$f(a + t\,d) \approx p(a + t\,d) = f(a) + t\,\Delta f(a) + \binom{t}{2}\Delta^2 f(a - d) +$$
$$+ \binom{t+1}{3}\Delta^3 f(a - d) + \binom{t+1}{4}\Delta^4 f(a - 2\,d) + \binom{t+2}{5}\Delta^5 f(a - 2\,d) + \ldots \quad \text{(G)}$$

Ez az interpolálás *Gauss*tól származó képlete. Ha a négyzetes interpolálás a feladat megoldására kielégítő pontosságot biztosít, a képletben

$$f(a + t\,d) \approx f(a) + t\,\Delta f(a) + \binom{t}{2}\Delta^2 f(a - d)$$

szereplő differenciák képzésében az a helyen és a hozzá szimmetrikusan elhelyezkedő $a + d$ és $a - d$ helyeken szereplő függvényértékek vesznek részt.

Gauss interpolációs képletét átrendezhetjük úgy, hogy belőle *Stirling* (S) képletét vagy *Bessel* (B) képletét kapjuk:

$$f(a + t\,d) \approx f(a) + t\,\frac{\Delta f(a) + \Delta f(a - d)}{2} + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 f(a - d) +$$
$$+ \frac{t\,(t^2 - 1)}{3!}\,\frac{\Delta^3 f(a - d) + \Delta^3 f(a - 2\,d)}{2} + \frac{t^2\,(t^2 - 1)}{4!}\Delta^4 f(a - 2\,d) +$$
$$+ \frac{t\,(t^2 - 1)\,(t^2 - 4)}{5!}\,\frac{\Delta^5 f(a - 2\,d) + \Delta^5 f(a - 3\,d)}{2} +$$
$$+ \frac{t^2\,(t^2 - 1)\,(t^2 - 4)}{6!}\Delta^6 f(a - 3\,d) + \ldots \quad \text{(S)}$$

illetve

$$f(a + td) \approx \frac{f(a) + f(a + d)}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\Delta f(a) +$$
$$+ \frac{t(t - 1)}{2!}\,\frac{\Delta^2 f(a) + \Delta^2 f(a - d)}{2} + \frac{t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{3!}\Delta^3 f(a - d) +$$
$$+ \frac{(t + 1)\,(t - 1)\,(t - 2)}{4!}\,\frac{\Delta^4 f(a - d) + \Delta^4 f(a - 2\,d)}{2} + \ldots \quad \text{(B)}$$

Feladatok a 3. §-hoz[2]

34. A következő táblázat *a)* rovatában $y = \sqrt{x}$ értékei $5 \cdot 10^{-3}$ pontossággal, *b)* rovatában $5 \cdot 10^{-5}$ pontossággal vannak megadva. Milyen fokú interpolálást helyes alkalmazni az *a)* rovatra, és milyen fokút a *b)* rovatra, hogy y (362,6) értékét a táblázat értékeinek pontosságával kapjuk:

(a)			(b)		
x	$y=\sqrt{x}$	Δy	$y=\sqrt{x}$	Δy	$\Delta^2 y$
360	18,97		18,9737		
		0,03		0,0263	
1	19,00		19,0000		0,0000
		0,03		0,0263	
2	19,03		19,0263		0,0000
		0,02		0,0263	
3	19,05		19,0526		− 0,0001
		0,03		0,0262	
4	19,08		19,0788		

35. Számítsuk ki az alanti táblázatból $y = \sqrt[3]{175}$ értékét:

x	y
150	5,3133
160	5,4288
170	5,5397
180	5,6462
190	5,7489
200	5,8480

36. Számítsuk ki $y = e^x$ alanti táblázatából $e^{0,17}$ értékét interpolálással haladó differenciákból:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,00000	1,10517	1,22140	1,34986	1,49182	1,64872

Számítsuk ki fenti táblázatból $e^{0,47}$ értékét retrográd differenciákkal interpolálva.

37. Írjuk fel $y = e^x$ negyedfokú *Newton*-polinomját az alanti — 6 értékes jegyr kiterjedő — táblázatból a [0; 4] számközben. Számítsuk ki belőle $e^{1,5}$ értékét. Becsüljük a hibát:

x	0	0,5	1	2	3	4
y	1,00000	1,64872	2,71828	7,38906	20,0855	54,5982

[2] Az 1—33. feladatokat a szöveg tartalmazza.

38. Írjuk fel $y = \lg x$ negyedfokú *Newton*-polinomját az alanti ($5 \cdot 10^{-5}$ pontosságú) táblázatból az [1; 6] számközben, és számítsuk ki log 3,25 interpolált értékét. Becsüljük a hibát:

x	1	2	3	4	5	6
$\lg x$	0,0000	0,3010	0,4771	0,6021	0,6990	0,7782

39. A $g(x)$ függvény értékei az alanti táblázatban az [1,0; 1,5] számközben $d = 0,1$ nagyságú egyenlőközű pontokban hét tizedesre vannak feltüntetve. Interpoláljuk az [1,2; 1,3] számközben 0,01 nagyságú egyenlőközű pontokban a függvény értékeit.

x	1,0	1,1	1,2	1,3
$g(x)$	1,0000000	0,9783407	0,9629225	0,9530203

x	1,4	1,5
$g(x)$	0,9480528	0,9475449

40. Az 1 m sugarú körben az x középponti szöghöz tartozó

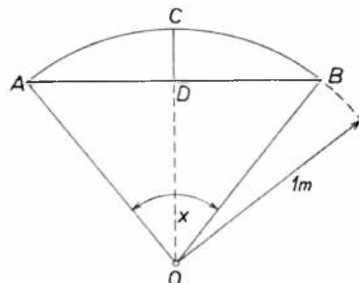
a) *AB* húr (h)

b) körszelet *CD* magassága (m)

c) körszelet területe (t)

a következő táblázatban van a szög néhány értékére négy tizedesig m-ben és m²-ben kiszámítva.

x	h	m	t
10°	0,1743	0,0038	0,0004
20°	0,3473	0,0152	0,0035
30°	0,5176	0,0341	0,0118
40°	0,6840	0,0603	0,0277



9. ábra

Számítsuk ki interpolálással a 26°-os középponti szöghöz tartozó h, m és t értékeket a (B) *Bessel*-képlettel másodrendben interpolálva (9. ábra).

41. Az ún. hibaintegrál

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx .$$

Számítsuk ki a

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$I(t)$	0,0000	0,1915	0,3413	0,4332	0,4772	0,4938

táblázatból az $I(t)$ értékét harmadrendben interpolálva az (S) *Stirling*-képlettel, ha $t = 1,8$.

42. Számítsuk ki az

$$I(t) = \int_0^t \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0{,}5 \sin^2 \varphi}}$$

elliptikus integrál értékét, ha $t = 21° 45'$, kvadratikusan interpolálva a (B) *Bessel*-képlettel az alanti táblázatból

t	21°	21° 30′	22°	22° 30′
$I(t)$	0,3706344	0,3796626	0,3887052	0,3977625

* * *

Egy gáztartályban $t°$ hőmérséklet mellett a következő p nyomásokat mérték (a hőmérsékleti fokok *Celsius* skála szerint, a nyomás g/mm²-ben értendő):

$t°$	70	75	80	85	90	95	100	105
p	3,05	3,77	4,63	5,66	6,86	8,28	9,93	11,84

$t°$	110	115	120	125	130	135	140
p	14,04	16,57	19,47	22,76	26,50	30,71	35,46

Számítsuk ki ebből a táblázatból:

43. a gáz nyomását 92° és 123° hőmérsékletnél;

44. a nyomásnak mint a hőmérséklet függvényének első és második differenciálhányadosát a $t = 100°$-nak megfelelő állapotban.

45. Számítsuk ki az alanti függvénytáblázatból y' és y'' értékét az $x = 0{,}95$ helyen.

x	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
y	0,71736	0,75128	0,78333	0,81342	0,84147	0,86742	0,89121

46. Számítsuk ki a 33. feladatban közölt táblázatból az $f''(3)$ értékét.

47. Számítsuk ki az

x	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
y	4,780	4,405	6,780	12,655	22,780	37,905	57,780

függvénytáblázatból y' és y'' értékét az $x = 4{,}5$ helyen.

48. Számítsuk ki az

x	3,141	3,142	3,143	3,144	3,145
$\lg x$	0,4970679364	0,4972061807	0,4973443810	0,4974825374	0,4976206498

táblázatból lg 3,140 értékét.

49. Számítsuk ki a 48. feladat táblázatából

$$\lg \pi \approx \lg 3{,}1415926536$$

értékét.

50. A hold deklinációja (δ) 1918. január 1-én

órakor	δ
0	8° 29′ 53,7″
1	8° 18′ 19,4″
2	8° 6′ 43,5″
3	7° 55′ 6,1″
4	7° 43′ 27,2″

Mekkora a hold deklinációja 3 óra 35 perc 15 mp-kor?

51. y kg terhelés valamely rugót x mm-rel rövidít meg. Méréseink 5 mm-enként

x(mm)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
y(kg)	0	48,7	105,2	172,4	253,4	351,6	469,7	601,9	778,5

A mérési berendezés olyan volt, hogy a megrövidülések ekvidisztáns értékek.

Számítsuk át a táblázatot ekvidisztáns terhelésekre ($d = 50$ kg). Pl. hány mm a rugó megrövidülése, ha a terhelés 300 kg?

52. Egy mérési sorozat hét mérése közül a negyedik mérést ε hibával jegyeztük fel. A többi mérési adat feljegyzése hibátlan. Milyen befolyást gyakorol ez a hiba a differenciák táblázatára?

53. Egy halandósági táblázat adatai szerint a 20 éves korban élő 100 000 ember közül meghal

20—25 éves korban 4040,
25—30 éves korban 4112,
30—35 éves korban 4451,
35—40 éves korban 5128,
40—45 éves korban 5908.

Hányan halnak meg 33 éves korban?

54. Írjuk fel az $y = \sin x$ *Newton*-polinomját az $x = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ abszcisszákhoz tartozó értékekből a $(0°, 90°)$ szögközben.

Jelöljük ezt a polinomot $p(x)$-szel és ábrázoljuk a

$$p(x) - \sin x$$

különbséget.

55. Az $y = f(x)$ függvény értékei az

helyeken:

$x = a$	$a + d$	$a + 2d$
$y = y_0$	y_1	y_2

Írjuk fel az $f(x)$ függvény $p(x)$ *Newton*-polinomját az $[a;\ a + 2d]$ számközben és számítsuk ki

$$\int_a^{a+2d} f(x)\,dx$$

közelítő értékét úgy, hogy $f(x)$-et az integrál jele alatt $p(x)$-szel helyettesítjük (*Simpson* képlete).

4. §. EGYENLETEK MEGOLDÁSA

a) Egy ismeretlent tartalmazó egyenletek

α) A feladat meghatározása

Az $f(z) = 0$ egyenlet megoldása — más szóval az $f(z)$ függvény zérushelyeinek meghatározása — azoknak a számoknak a felkutatásából áll, amelyeket az $f(z)$ függvényben a z helyébe helyettesítve eredményül zérust kapunk. Ezeket a számokat az egyenlet gyökeinek nevezzük.

A feladat, amelynek megoldásához az $f(z)$ függvény zérushelyeinek meghatározása szükséges, többnyire azt is meghatározza, hogy valamennyi zérushely felkutatására van-e szükség, vagy közülük csak egyre vagy egyesekre, pl. csak a valós zérushelyekre vagy csak arra a valós zérushelyre, amelynek abszolút értéke legkisebb, vagy azokra a komplex zérushelyekre, amelyeknek valós része negatív.

A komplex számtartományban megoldandó egyenlet elvben visszavezethető egy egyenletrendszerre, amely a valós számok tartományában oldandó meg. Ha az $f(z)$ függvényben előforduló minden komplex számot $a + bi$ alakban írunk fel, és az ismeretlent is $x + yi$-vel helyettesítjük, (a, b, x, y valós számokat jelentenek és $i = \sqrt{-1}$), akkor

$$f(z) = g(x, y) + h(x, y) \cdot i$$

és az eredeti egyenlet helyett a vele ekvivalens

$$g(x, y) = 0$$

$$h(x, y) = 0$$

egyenletrendszert kell megoldani (x, y) valós számpárokkal.

A megoldás. Az egyenlet megoldására ritkán sikerül ***képletet*** találni. Vannak képletek pl. algebrai egyenletek megoldására, ha a polinom, amelynek zérushelyeit keressük, 4-nél nem magasabb fokú.

A műszaki gyakorlatban azonban a másodiknál magasabb fokú algebrai egyenletek megoldására is — egyes kivételektől eltekintve — közelítő eljárásokat alkalmazunk, sőt sokszor a másodfokú egyenletek megoldására is.

A megoldás műveletét két lépésre tagolhatjuk.

Az első (előkészítő) lépés: tájékozódás az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeinek száma és elhelyezkedése felől és az egyes gyökök elkülönítése. Ez annyit jelent, hogy az egyes gyökök körül — különösen a feladatban érdekes gyök vagy gyökök körül — olyan számközöket (tartományokat) határozunk meg, amelyekben más gyök már nincs.

A második lépés a szűkebb értelemben vett megoldás. Az első lépésben meghatározott számközöket (tartományokat) szűkítjük a gyök körül olyan kis terjedelemre, hogy azok hossza (átmérője) ne legyen nagyobb, mint a feladat megoldásától megkívánt pontosság.

β) Tájékozódás az egyenlet gyökeinek száma és elhelyezkedése felől. A gyökök elkülönítése

Első módszer. Ha az $f(x)$ függvényről sikerül megállapítani, hogy

1. az $[a, b]$ számközben mindenütt értelmezve van;
2. az $[a, b]$ számközben folytonos;
3. az $f(a)$ és $f(b)$ helyettesítési értékek ellenkező előjelűek,

akkor az egyenletnek ebben a számközben van gyöke.

Ha továbbmenőleg az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ számközben monoton, akkor az $[a, b]$ számközben az egyenletnek pontosan egy gyöke van. Ha az $f(x)$ nem monoton az egész $[a, b]$ számközben, de a számköz véges számú részszakaszra osztható, és minden részszakaszban $f(x)$ monoton függvény, akkor az egyes részszakaszokat különkülön vizsgáljuk meg.

Második módszer. Ha az $f(x)$ függvény görbéjét az $[a, b]$ számközben fel tudjuk vázolni, ennek a görbének és az x tengelynek metszéspontjai tájékoztatnak az egyenlet gyökeinek számáról és elhelyezkedéséről. Az abszcisszákat az ábrából durván leolvashatjuk. Sokszor ezt a vázlatot nem lehet, vagy csak fáradságosan és pontatlanul lehet elkészíteni, de $f(x)$ felbontható

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

alakban, és mind $g(x)$ görbéje külön, mind $h(x)$ görbéje külön könnyebben és pontosabban vázolható az $[a, b]$ számközben. Akkor a két görbe metszéspontjainak abszciszszái nyilván kielégítik az $f(x) = 0$ egyenlettel ekvivalens

$$g(x) = h(x)$$

egyenletet, tehát tájékoztatnak a keresett gyökök számáról és elhelyezkedéséről.

Példák

1. $$p(x) = x^3 + 6x^2 + 6x - 7 = 0.$$

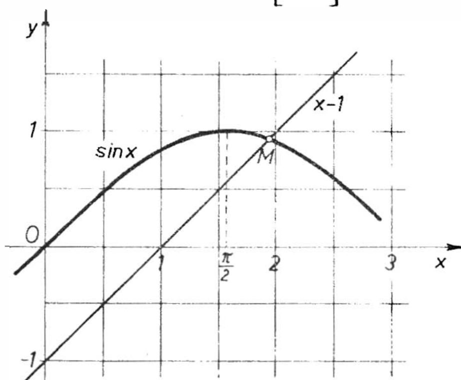
Descartes jelszabálya szerint az egyenletnek egy pozitív gyöke van. Mivel $p(0) < 0$ és $p(1) > 0$, a pozitív gyök a $[0, 1]$ számközben keresendő. Az egyenletnek még két gyöke van: ha ezek valós számok, akkor negatívoknak kell lenniök. Mivel $p(-10) < 0$ és $p(-3) > 0$, ezek a gyökök a $[-10, -3]$ és $[-3, 0]$ számközben vannak.

2. $$\sin x - x + 1 = 0.$$

Az egyenlettel ekvivalens a

$$\sin x = x - 1$$

egyenlet. A sin x görbéjét az $x - 1$ függvény görbéje (10. ábra) az M pontban metszi, melynek abszcisszája a $\left[\frac{\pi}{2}, 2\right]$ számközben van. Több gyök az ábra szerint nincs.



10. ábra

Feladatok

Határozzuk meg a következő egyenletek gyökeinek számát, és különítsük el őket egymástól.

1. $p(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0.$
2. $p(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0.$
3. $\sin x - 10x + 10 = 0.$
4. $\cos x = x.$
5. $e^x = 3x.$
6. $x = e^{-x}.$
7. $x \ln x = 100.$

Elkülönítendő a következő egyenletek legkisebb pozitív gyöke.

8. $x = \operatorname{tg} x.$ 9. $\operatorname{ch} x \cdot \cos x = 1.$

b) A közelítő megoldás módszerei

α) Húrmódszer (regula falsi)

Az $f(x)$ függvényről feltesszük, hogy

a) az $[a, b]$ zárt számközben mindenütt folytonos (az a pontban jobbról, a b pontban balról);

b) $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek, pl. $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$ (mint a 11. ábrán)[1];

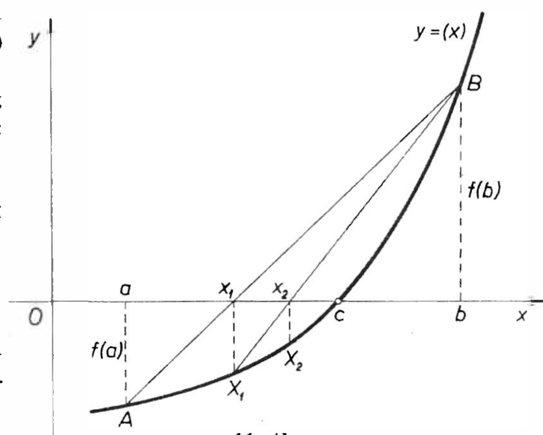
c) az $f(x) = 0$ egyenletnek az $[a, b]$ számközben egyetlen gyöke van, amelyet c-vel jelölünk.

Az AB húr az abszcissza tengelyt egy pontban metszi, melynek abszcisszáját x_1-gyel jelöljük.

$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Szemléletesen is nyilvánvaló, egyszerű számítással is könnyen igazolható, hogy

$$a < x_1 < b.$$



11. ábra

[1] Az olvasó ismételje meg a következő gondolatmenetet azzal a változtatással, hogy $f(a) > 0$, és $f(b) < 0$.

Ha $f(x_1) = 0$, akkor a gyököt pontosan meghatároztuk. Ha $f(x_1) < 0$, mint az ábrán, akkor az előbbi számítást megismételjük az $[x_1, b]$ számközre, és az x_2 abszciszszához jutunk.[2]

$$x_1 < x_2 < b.$$

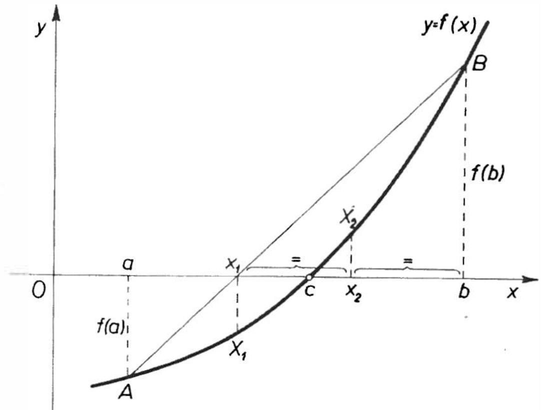
A számítás újból és újból való ismétlése vagy véges számú lépés után az $f(x) = 0$ egyenlet gyökéhez vezet, vagy az

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

végtelen sorozathoz.

Bebizonyítható, hogy ez a sorozat konvergens és határértéke azonos az $f(x) = 0$ egyenlet c gyökével az $[a, b]$ számközben. A sorozat elemei a keresett gyök közelítő értékei.

A leírt módszer sokszor lassan konvergáló sorozathoz vezet. Ezért célszerű a módszer gyorsabban konvergáló módosítása. Ez a módosítás egyszersmind arra is módot ad, hogy a közelítő érték hibáját pontosabban becsüljük. A módosított eljárás alkalmazásánál feleslegessé válik az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeinek előzetes elkülönítése.



12. ábra

A módosított eljárás megegyezik az eredetivel addig, amíg az első x_1 közelítő értéket meghatározzuk. Ha $f(x_1) < 0$, mint a 12. ábrán, akkor meghatározzuk az $[x_1, b]$ számköz felező pontját, amelynek abszcisszáját x_2-vel jelöljük.

Ha $f(x_2)$ előjele pozitív, mint az ábrán, akkor az eredeti $[a, b]$ számközt az $[x_1, x_2]$ számközzel helyettesítjük, amelyről szerkesztésénél fogva tudjuk, hogy

$$x_2 - x_1 < \frac{b-a}{2}.$$

Ha pedig $f(x_2)$ negatív volna, akkor az eredeti $[a, b]$ számközt az $[x_2, b]$ számközzel helyettesítjük, amely szintén kisebb, mint az eredeti számköz hosszának fele.

Az új számköz hossza tehát minden esetben kisebb, mint az eredetinek fele.

Az új számközzel megismételjük a leírt eljárást. Ha az így kapott új számköz bal- és jobboldali végpontjának abszcisszái x_3 és x_4, akkor

$$x_4 - x_3 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{b-a}{4}.$$

Az n-edik lépésben nyert $[x_{2n-1}, x_{2n}]$ számköz, amelynek a c gyök szintén belső pontja, kisebb mint az $[a, b]$ eredeti számköz hosszának 2^n-nel való hányadosa

$$x_{2n} - x_{2n-1} < \frac{b-a}{2^n}.$$

[2] Ha $f(x_1) > 0$, akkor a számítást az $[a, x_1]$ számközre ismételjük.

Ha tehát a c gyököt x_{2n-1}-gyel vagy x_{2n}-nel helyettesítjük, a hiba kisebb mint

$$x_{2n} - x_{2n-1} < \frac{b-a}{2^n}.$$

Ezért az

$$x_1, x_3, x_5, \ldots \text{ monoton növő}$$

és az

$$x_2, x_4, x_6, \ldots \text{ monoton fogyó}$$

sorozatoknak közös a határértékük és bebizonyítható, hogy ez az $f(x) = 0$ egyenletnek az $[a, b]$ közben fekvő gyökével, vagy ha a számközben az egyenletnek több gyöke van, valamelyik gyökével azonos.

Megjegyzés: Ha az egyenlet algebrai, akkor $f(x)$ helyettesítési értékeit a *Horner*-elrendezéssel célszerű kiszámítani.

Példa

1. Kiszámítandó az

$$f(x) \equiv x^3 + 2x^2 - 7x - 5 = 0$$

egyenlet pozitív gyöke (lásd a 2. § *b)* pont, 7. példát). A természetes számokat rendre helyettesítve, *Horner* elrendezésével kiszámítjuk, hogy

$$f(2) = -3 \quad \text{és} \quad f(3) = 19.$$

A gyök a $[2, 3]$ számközben van.

Az eredeti húrmódszerrel: $x_1 \approx 2{,}14.$ $f(2{,}14) \approx -1{,}02.$
A gyök a $[2{,}14;\ 3]$ számközben van.
$x_2 \approx 2{,}18.$ $f(2{,}18) \approx -0{,}40.$
A gyök a $[2{,}18;\ 3]$ számközben van.
$x_3 \approx 2{,}20.$ $f(2{,}20) \approx -0{,}07.$
A gyök a $[2{,}20;\ 3]$ számközben van.
$x_4 \approx 2{,}203.$

A sorozat lassan konvergál. A hibakorlátról még a negyedik lépés után is csak annyit állíthatunk biztosan, hogy nem nagyobb, mint

$$3 - 2{,}20 = 0{,}80.$$

A módosított eljárás. Miután meghatároztuk, hogy a gyök a $[2;\ 3]$ számközben van és

$$x_1 \approx 2{,}14, \qquad f(2{,}14) \approx -1{,}02,$$

megfelezzük a $[2{,}14;\ 3]$ számközt. A felező pont

$$x_2 = 2{,}57, \qquad f(2{,}57) \approx 7{,}21.$$

gyök a $[2{,}14;\ 2{,}57]$ számközben van.

$$x_3 \approx 2{,}19, \qquad f(2{,}19) \approx -0{,}23.$$

Ismét felezzük a [2,19; 2,57] számközt. A felező pont

$$x_4 = 2{,}38, \qquad f(2{,}38) \approx 2{,}29.$$

A gyök a [2,19; 2,38] számközben van.

$$x_5 \approx 2{,}210, \qquad f(2{,}210) \approx 0{,}08.$$

Mivel most a helyettesítési érték pozitív, a [2,19; 2,210] számközt felezzük:

$$x_6 = 2{,}200, \qquad f(x_6) \approx -0{,}07.$$

A második módszer valamivel gyorsabban konvergál. A hibáról az utolsó lépés után tudjuk, hogy legfeljebb

$$2{,}210 - 2{,}200 = 0{,}010.$$

Megjegyzés a számítás technikájára. Az első lépéseknél nem törekszünk túl nagy pontosságra, hogy a számítással gyorsabban haladjunk. A számítás közbenső eredményei mutatják, hogy mikor kell egy-egy tizedessel a részletszámítások pontosságát fokozni. A lépéseket addig kell ismételni, míg az eredmény a feladatban megkövetelt pontosságot elérte.

β) Newton módszere, az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeinek közelítő meghatározására (Érintő módszer)

Az $f(x)$ függvényről feltételezzük, hogy azokban a szakaszokban, amelyek feladatainkban érdekesek, kétszer folytonosan differenciálható. Műszaki feladatokban ez a követelmény teljesülni szokott.

Ha

$$f(a) < 0 \quad \text{és} \quad f(b) > 0$$

és az $[a, b]$ számközben $f''(x) > 0$, akkor ebben a számközben az egyenletnek pontosan egyetlen c gyöke van. Ezt a gyököt a következő eljárás tetszőlegesen kicsire csökkenthető hibával közelíti meg.

Kiszámítjuk az

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

különbség értékét. Azután kiszámítjuk az

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

értékét. A műveletet mindig újból ismételjük:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

A

$$b,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

sorozat monoton csökken és az $[a, b]$ számközben levő egyetlen c gyökhöz tart.

Ha $f''(x) < 0$ az $[a, b]$ számközben, akkor a bal oldali a végpontból kiindulva az

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

képlettel az

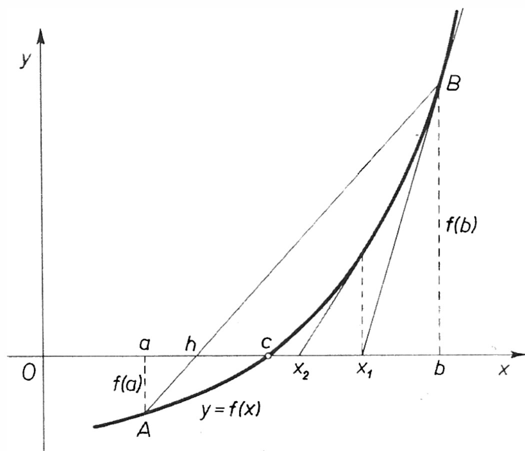
$$a, y_1, y_2, y_3, \ldots$$

monoton növekedő sorozatra jutunk, amely ugyancsak az $[a, b]$ számközben fekvő egyetlen c gyökhöz tart. Ezt a *Fourier*-től származó tételt a következő 13. ábra szemlélteti. Megértéséhez meg kell jegyezni, hogy a

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

kifejezés az x tengelynek és annak az érintőnek metszéspontját határozza meg, amelyet a függvénygörbéhez a $B[b, f(b)]$ pontban húzhatunk.

Az olvasó szerkessze meg a szemléltető ábrát, ha $f(a) < 0$; $f(b) > 0$; $f''(x) < 0$ az $[a, b]$ számközben, amikor a függvénygörbe alulról konkáv.



13. ábra

(A szemlélettől független bizonyítás megtalálható majdnem minden analízis könyvben. A pontos vizsgálat iránt érdeklődő olvasónak ajánlható *Rényi Alfréd* dolgozata „A *Newton*-féle gyökközelítő eljárásról", Matematikai Lapok I. évf. 4. számában 278—292. lap.)

Az ábra mutatja, hogy a gyök hibájának becslésére szolgál a következő egyenlőtlenség

$$x_1 - c < b - a.$$

Jobb becslést kapunk, ha meghúzzuk az $\overline{AB}$ húrt, és kiszámítjuk a húr és a tengely metszéspontjának abszcisszáját (l. a húrmódszert):

$$h = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)} .$$

Ha x_1 a c gyököt jobbról közelíti, h azt balról közelíti, tehát

$$x_1 - c < x_1 - h.$$

A *Newton*-féle közelítő eljárás és a húrmódszer kombinálása olyan konvergáló eljárásra vezet, amelynek hibája is jól becsülhető.

Példa

2. $$f(x) = x + \lg x = 0.$$

Mivel

$$f(0,1) = -0{,}9 < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$

és

$$f''(x) \approx -\frac{0{,}43429}{x^2} < 0 \quad \text{a } [0{,}1;\ 1]\ \text{számközben},$$

az egyenletnek a [0,1; 1] számközben egyetlen gyöke van. A számítás berendezése (5 jegyű logaritmustáblázattal)[3]

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n) = 1 + \frac{\lg e}{x_n}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0,1	– 0,9	5,3	0,3
2	0,3	– 0,22	2,45	0,39
3	0,39	– 0,019	2,113	0,399
4	0,399	– 0,00003	2,088	0,39901
5	0,39901			

Ötjegyű logaritmustáblázattal a pontosságot tovább fokozni nem lehet.

γ) **Newton módszerének egy módosított alakja**

Newton módszerével az x_n közelítő értékéből az x_{n+1} közelítő értéket csak úgy számíthatjuk ki, hogy az x_n helyen nemcsak az $f(x)$ függvény, hanem az $f'(x)$ derivált függvény helyettesítési értékét is kiszámítjuk.

Ezek a helyettesítési értékek lépésről lépésre változnak. Jelentékeny időmegtakarítást jelent, ha a derivált függvény helyettesítési értékének kiszámítását meg lehet takarítani. Lehetővé teszi ezt a következő módszer, amelynek hátránya azonban, hogy lassabban konvergál, mint *Newton* módszere. Viszont további előnye, hogy a közelítő érték hibáját igen könnyű megállapítani.

Jelentse c az

$$f(x) = 0$$

egyenlet egyetlen gyökét az $[a, b]$ számközben. Tegyük fel pl., hogy

$$f(a) < 0 \quad \text{és} \quad f(b) > 0.$$[4]

[3] A számítás közbenső eredményei megmutatják, hogy mikor célszerű a részletszámítások pontosságát egy-egy tizedessel növelni.

[4] Mint a korábban vázolt módszereknél is, az olvasó jól teszi, ha az okoskodást megismétli az $f(a) > 0$ és $f(b) < 0$ esetben.

Feltesszük, hogy $f(x)$ az $[a, b]$ számközben monoton. Legyen a számközben

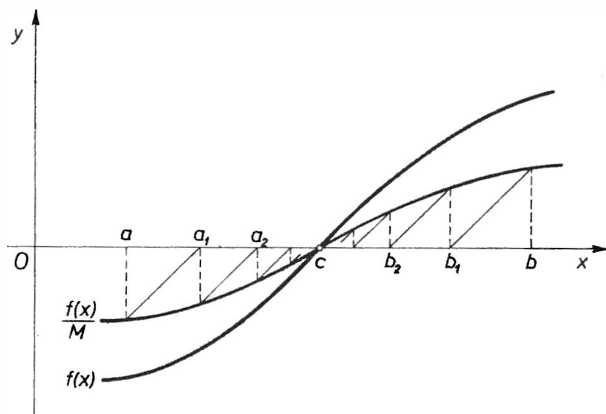
$$|f'(x)| < M.$$

M egy állandó számot jelent, amelynek meghatározása a legtöbb esetben becsléssel sikerül. Mennél kisebb M, annál gyorsabban konvergálnak a leírandó eljárásból származó sorozatok a gyökhöz. *Megjegyezzük, hogy M-et az eljárás közben is szabad kisebbíteni, sőt kívánatos is a konvergálás gyorsítása érdekében.*

Képezzük a *Newton* módszerében szereplő x_n sorozat helyett a következő két sorozatot:

$$a_1 = a + \frac{1}{M} \cdot |f(a)|, \ldots, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{M} \cdot |f(a_n)|, \ldots$$

$$b_1 = b - \frac{1}{M} \cdot |f(b)|, \ldots, b_{n+1} = b_n - \frac{1}{M} \cdot |f(b_n)|, \ldots$$



14. ábra

Az első monoton nő és tart a gyökhöz; a második monoton fogy és tart a gyökhöz.

Mivel a gyök mindig a_n és b_n között van, a_n illetve b_n közelítő érték hibája kisebb mint $b_n - a_n$.

Az eljárást csak szemléletesen igazoljuk (14. ábra).

Az $f(x)$ görbéjéből szerkesztett $\frac{f(x)}{M}$ görbe minden pontjában feltétel szerint az iránytangens abszolút értéke

$$\frac{|f'(x)|}{M} < 1,$$

tehát az ábrában a 45° alatt emelkedő ferde vonalak az $\frac{f(x)}{M}$ görbéje és az x tengely között haladnak. Metszéspontjaik az x tengellyel éppen az $\{a_n\}$ és a $\{b_n\}$ sorozat elemeit ábrázolják.

Ismételjük az előbbi példát nem *Newton* eredeti módszerét alkalmazva, hanem a vázolt módosítást:

$$f(x) = x + \lg x$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\lg e}{x} \approx 1 + \frac{0{,}43429}{x}.$$

A [0,1; 1] számközben:

$$|f'(x)| < M = 5{,}4\,.$$

Beállítjuk a logarlécen $\frac{1}{5{,}4}$ tényezőt. A monoton növekvő sorozat elemei rendre

n	a_n	$a_n + \lg a_n$	$a_n + \frac{a_n + \lg a_n}{5{,}4} = a_{n+1}$
1	0,1	0,9	0,266
2	0,266	0,309	0,323
3	0,323	0,168	0,354
4	0,354	0,097	0,372
5	0,372		

A monoton fogyó sorozat elemi rendre:

n	b_n	$b_n + \lg b_n$	$b_n - \frac{b_n + \lg b_n}{5{,}4} = b_{n+1}$
1	1	1	0,814
2	0,814	0,725	0,682
3	0,682	0,516	0,586
4	0,586	0,354	0,520
5	0,520		

Az eljárás sokkal kevesebb számoló munkát igényel, de lassabban konvergál, mint *Newton* módszere. A hiba a negyedik lépés után kisebb, mint

$$0{,}520 - 0{,}372 = 0{,}148\,.$$

Ha pl. az első lépés után figyelembe vesszük, hogy a gyököt tartalmazó számköz már [0,266; 0,814], akkor M csökkenthető:

$$|f'(x)| \approx \left|1 + \frac{0{,}43429}{x}\right| < 2{,}6\,.$$

A következő lépésben

$$a_3 = 0{,}266 + \frac{0{,}309}{2{,}6} = 0{,}385$$

$$b_3 = 0{,}814 - \frac{0{,}725}{2{,}6} = 0{,}535\,,$$

tehát két lépéssel gyorsabban jutunk el az előbb csak a negyedik lépés után elért közelítéshez.

δ) Az iterálás módszere az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeinek közelítő meghatározására

Az egyenlet mindig felírható ebben az alakban[5]:

$$x = g(x).$$

Ha c az egyenlet gyöke, akkor fennáll, hogy

$$c = g(c).$$

Ha x_1 nem gyöke az egyenletnek, akkor $g(x_1)$ nem x_1-gyel, hanem egy tőle különböző x_2 számmal egyenlő:

$$x_2 = g(x_1).$$

x_2-t helyettesítve a jobb oldalon ismét egy más számot kapunk eredményül.

Ha az egyenlet c gyöke körül ki lehet jelölni olyan (a, b) számközt, amelyben

$$|g'(x)| < 1,$$

akkor az (a, b) számköz bármely x_1 számából kiindulva az

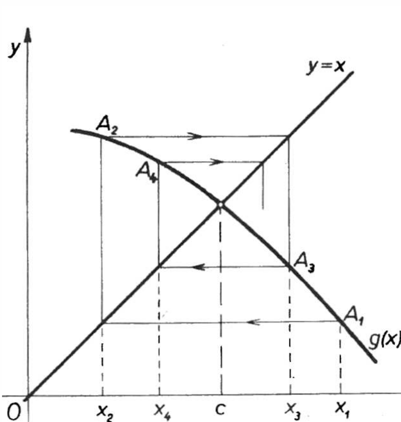
$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

számsorozat a c gyökhöz konvergál. Ha pedig a gyök körül kijelölhető olyan (a, b) számköz, melyben

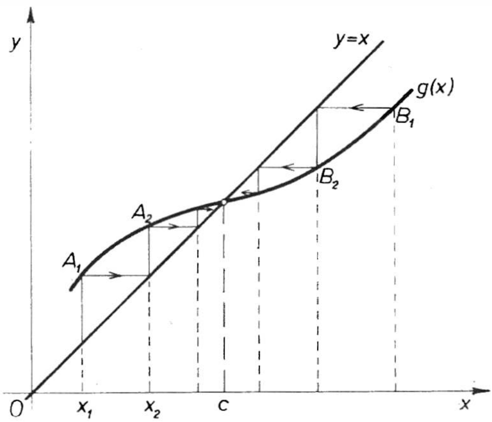
$$|g'(x)| > 1.$$

a számsorozat nem konvergál a c gyökhöz. Első esetben a gyököt *vonzó (attraktív)* gyöknek, a másodikban *taszító (repulzív)* gyöknek *nevezzük. (A tétel bizonyítása az*

A vonzó gyököt szemléltetik a következő (15.—16.) ábrák:



15. ábra
A közelítő értékek váltakozva jobbról és balról közelítenek

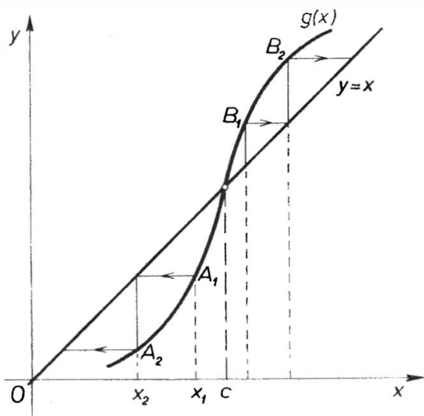


16. ábra
A közelítő érték-k monoton tartanak a gyökhöz

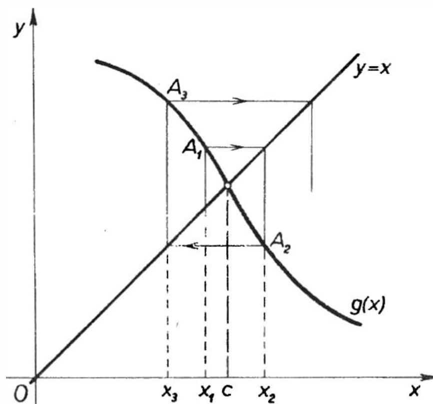
[5] Ilyen, az eredetivel ekvivalens egyenletet többféleképpen nyerhetünk. Ezek közül esetleg nemcsak egyre alkalmazható a módszer. A számító ügyességén múlik, hogy hogyan oldja meg feladatát.

analízis sok tankönyvében megtalálható. L. még *Rényi A.* az előbbi fejezetben is idézett dolgozatát.)

A taszító gyököt szemléltetik a következő (17.—18.) ábrák:



17. ábra



18. ábra

Példák

3. Számítsuk ki az

$$x = \cos x$$

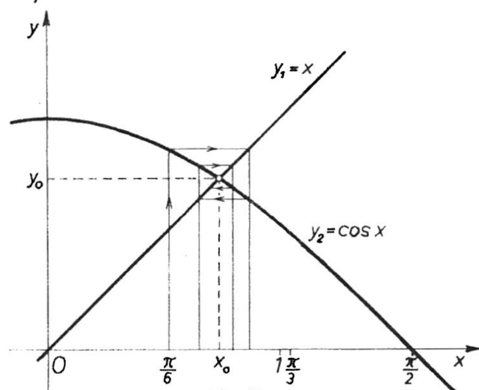
egyenlet gyökét (19. ábra).

$$x < \cos x, \quad \text{ha} \quad x = 0 \quad \text{és} \quad x > \cos x, \quad \text{ha} \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

Az $x - \cos x$ differenciálhányadosa a $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ számközben mindig pozitív, tehát a számköz egyetlen gyököt tartalmaz. Ez a gyök vonzó gyök, mert a $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ számközben

$$|g'(x)| = |\sin x| < 0{,}9.$$

Kezdőértékül választjuk a $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ számköz felező pontját. A részletszámításokat 3 tizedesre pontosan végezzük.



19. ábra

x_n	$\cos x_n$	x_{n+1}
$(0{,}524) \approx \pi/6$	cos 30°	0,866
0,866	cos 49,6°	0,648
0,648	cos 37,1°	0,798
0,798	cos 45,5°	0,701
0,701	cos 40,2°	0,764
0,764	cos 43,8°	0,722
0,722	cos 41,4°	0,750
0,750	cos 43,0°	0,731
0,731	cos 41,9°	0,744
0,744	cos 42,6°	0,736
0,736	cos 42,2°	0,741
0,741	cos 42,4°	0,738
0,738	cos 42,3°	0,740 hibakorlát 0,002

A fenti példában a közelítő értékek váltakozva jobbról és balról közelítik az egyenlet gyökét. Ilyenkor meggyorsítja az eljárás konvergálását, ha minden következő lépésben az előző lépésben elért határok középértékéből indulunk ki.

x_n	$\cos x_n$	x_{n+1}	
$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$	cos 30°	0,866	$\frac{0{,}524 + 0{,}866}{2} = 0{,}695$
0,695	cos 39,8°	0,768	
0,731	cos 41,9°	0,744	
0,738	cos 42,3°	0,740	

Ilyen módon ugyanazt a hibakorlátot, amelyet előbb 13 lépésben értünk el, 4 lépésben kaptuk. Folytatva

$$0{,}739 \quad \cos 42{,}34° \quad 0{,}739.$$

Jobb közelítést ezek után már csak azáltal érhetünk el, hogy a részletszámításokat több tizedesre pontosan végezzük el.

4. Számítsuk ki az

$$f(x) \equiv 27\,x^3 - 9\,x + 1 = 0$$

egyenlet legkisebb pozitív gyökét.

Descartes jelszabálya szerint az egyenletnek vagy nincs pozitív gyöke, vagy kettő van. Az $f(x)$ függvény pozitív, ha $x = 0$ és ha x értéke nagy. A differenciálhányados

$$f'(x) = 9\,(9x^2 - 1),$$

negatív a $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ számközben és pozitív az $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ számközben. Az $f(x)$ függvény az előbbi számközben csökken, a másodikban nő.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 < 0,$$

tehát két pozitív gyök van, amelyek közül a kisebb (a legkisebb pozitív gyök) a $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ számközben fekszik.

Az egyenletet átalakítjuk úgy, hogy az iterálást alkalmazni lehessen:

$$x = \frac{27\,x^3 + 1}{9} \equiv g(x)$$

A $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ számközben

$$|\,g'(x)\,| = 9\,x^2 \leqq 1,$$

és ha a jobboldali határt bármely kevéssel kisebbítjük, $|\,g\,(x)\,| < 1$. A gyök vonzó.

Kezdő értékül nullát választjuk. A részletszámításokat először 1, azután 3, azután 6 tizedesre pontosan végezzük

x_n	0	0,1	0,114	0,115556	0,115740
$x_{n+1} = g(x_n)$	0,1	0.114	0,115556	0,115740	0,115761

Az $x_5 = 0{,}115761$ érték a gyököt 4 tizedesre pontosan már megközelíti.

Feladatok

Mely módszer alkalmazható a következő egyenletek megoldására a *Horner*-elrendezésen kívül? Oldjuk meg az egyenleteket az alkalmazható módszerekkel.

1. 2. § 21. feladat.
2. 2. § 22. feladat.
3. 2. § 23. feladat.
4. 2. § 24. feladat.
5. 2. § 25. feladat.
6. 2. § 26. feladat.
7. 2. § 27. feladat.
8. 2. § 28. feladat.
9. Igazoljuk, hogy

$$x^5 + 5\,x + 1 = 0$$

egyenletnek egyetlen reális gyöke van, amely negatív és a (—0,2; 0) számközbe esik. Határozzuk meg ezt a gyököt iterálással 5 tizedesre pontosan.

10. 2. § 33. feladat. Számítsuk ki az egyenlet gyökeit 4 tizedes pontossággal.
11. $x^3 + 3\,x - 2 = 0$.
12. 2. § 37. feladat.
13. $x^3 - 4\,x - 5 = 0$.
14. 2. § 34. feladat.
15. 2. § 35. feladat.
16. 2. § 36. feladat.

Határozzuk meg iterálással

17. $x = \cos x$ legkisebb pozitív gyökét.

18. $3x = e^x$ legkisebb pozitív gyökét.

19. $10x = 10 + \sin x$.

20. $10x = e^{-x}$.

21. $e^x - \dfrac{10}{x} = 0$.

22. $e^x + x - 2 = 0$.

23. $x^x = 10$.

24. $x = e^{-x}$.

25. $10 \ln x = x^3 - 3$.

Állapítsuk meg a megoldás alkalmas módszerét, és oldjuk meg közelítőleg a következő egyenleteket:

26. $x \ln x = 100$.

27. $x^2 = 20 \sin x$.

28. $4 \sin x - 3x = 0$.

29. $3 \sin \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x} - 3{,}7 = 0$.

Számítsuk ki a következő két egyenlet legkisebb pozitív gyökének közelítő értékét:

30. $\operatorname{tg} x = x$.

31. $\operatorname{ch} x \cdot \cos x = 1$.

* * *

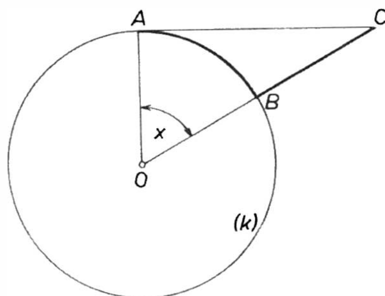
FELADATOK A PLANIMETRIA KÖRÉBŐL

32. Kiszámítandó az egyenlőszárú háromszög alapja 0,01 cm pontossággal, ha kerülete $2s = 16$ cm és a belé írható kör sugara $r = 1$ cm.

33. Egy háromszög két oldala $a = 15$ cm; $b = 8$ cm. A háromszögbe írható kör sugara $r = 2$ cm. Kiszámítandó a harmadik (c) oldal (10^{-2} cm pontossággal).

34. Határozzuk meg a kör x középponti szögét (0,01° pontossággal) úgy, hogy a hozzátartozó $\overline{AB}$ húr és $\widehat{AB}$ körív által határolt körszelet területe a kör területének ötödrésze legyen.

35. A k körhöz az A pontban érintőt húzunk. Az $AOB = x$ középponti szög OB szára ezt az érintőt a C pontban metszi. Határozzuk meg a középponti szöget 0,01° pontossággal úgy, hogy az AB körív egyenlő legyen a BC távolsággal (20. ábra).



20. ábra

$$BC = OC - OB = \frac{r}{\cos x} - r.$$

Ez a távolság egyenlő az AB körívvel, rx-szel. A megoldandó egyenlet

$$(x + 1) \cos x = 1.$$

36. (Lásd a 35. feladat ábráját.) Határozzuk meg az x középponti szöget úgy, hogy az OAB körcikk területe az OAC háromszög területének fele legyen.

37. Az r sugarú kör A pontja körül ϱ sugárral kört rajzolunk, amelynek az r sugarú kör belsejébe eső BC íve egyenlő r-rel. Ki kell számítani ϱ-t.

38. (Lásd a 37. feladatot.) Határozzuk meg a ϱ sugarat úgy, hogy a ϱ sugarú kör ABC körcikkének területe az r sugarú kör területének negyedrésze legyen.

39. (Lásd az előbbi két feladatot.) Határozzuk meg a ϱ-t úgy, hogy az ABC körcikk t területe a legnagyobb legyen.

40. A köralakú legelő peremének A pontjában megerősített cölöphöz kikötött kecske a legelő felét tudta lelegelni. Mekkora a kötél, ha a legelő sugara r?

41. A kör AB húrjához tartozó középponti szög 120°. Mekkora szöget zár be az AB húrral az AC húr, amely felezi az AB húr által határolt nagyobb körszeletet?

42. Egy félkör átmérőjének A és B végpontjait összekötjük a félkörbe írt $ADCB$ törtvonallal.

$$BC = 4 \text{ cm}; \quad CD = 3 \text{ cm}; \quad DA = 2 \text{ cm}.$$

Mekkora a d átmérő?

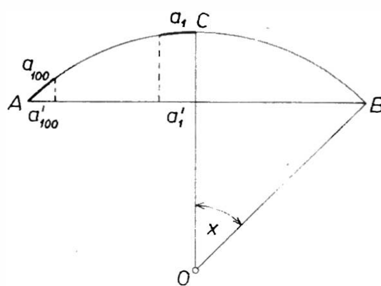
43. A körtárcsa AB húrja 12 cm. Az AB körív AC fele száz egyenlő ívre van beosztva $a_1, a_2, \ldots a_{100}$ (21. ábra).

Ezek vetülete az AB húron:

$$a_1', a_2', \ldots a_{100}'$$

$$a_{100}' = 0{,}9 \cdot a_1'$$

Mekkora a körtárcsa sugara?



21. abra

44. Számítsuk ki cos 20° értékét a cos 60° = 0,5 ismeretében 4 tizedes pontossággal.

45. Számítsuk ki sin 10° értékét a sin 30° = 0,5 ismeretében 4 tizedes pontossággal.

46. Számítsuk ki cos 12° értékét cos 60° = 0,5 ismeretében 3 tizedes pontossággal.

* * *

FELADATOK A SZTEREOMETRIA KÖRÉBŐL

47. Messük az 1 m sugarú gömböt vízszintes síkkal úgy, hogy a térfogat sík feletti része a másiknak n-szerese legyen. ($n = 2, 3, 4$; megszabott pontosság 10^{-4} m.)

48. Milyen magasan emelkedik ki az 1 m sugarú gömb a vízből, ha anyagának fajsúlya 0,75? (10^{-4} pontosság.)

49. Egy gömb alakú víztartály belső sugara $r = 4{,}75$ m. Milyen magas benne a vízállás (10^{-3} m pontossággal), ha benne 400 m^3 víz van?

* * *

FELADATOK A FÜGGVÉNYANALÍZIS KÖRÉBŐL

50. Határozzuk meg x legkisebb pozitív értékét, amelyre nézve az

$$y = x \sin x$$

függvénynek szélső értéke van.

51. Határozzuk meg 10^{-3} pontossággal azt a legkisebb pozitív abszcisszát, amelyhez az

$$y = x \sin x$$

görbén inflexiós pont tartozik.

52. Számítsuk ki 10^{-4} pontossággal, hogy az argumentum mely pozitív értékénél van

$$y = x^3 + x^2$$

függvény görbéjének legnagyobb görbülete.

53. Számítsuk ki, hogy az argumentum mely értékénél van az $y = \operatorname{tg} x$ függvény görbéjének legnagyobb görbülete.

54. Határozzuk meg az

$$y = \operatorname{ch} x$$

görbéjéhez, a láncgörbéhez, az origóból húzható érintők érintési pontjának abszcisszáját.

55. Az $\bar{r}(t)$ helyvektorral meghatározott térgörbe egyenlete

$$\bar{r}(t) = t \cdot \cos t \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k};$$

$y(t)$ és $z(t)$ a paraméter differenciálható függvényei. Határozzuk meg a paraméter legkisebb pozitív értékét, amelynél a térgörbe érintője merőleges az x tengelyre.

* * *

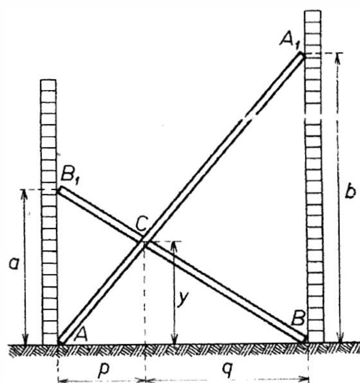
NÉHÁNY MŰSZAKI FELADAT

56. A 22. ábrán látható téglafalak között két gerenda van kitámasztva.

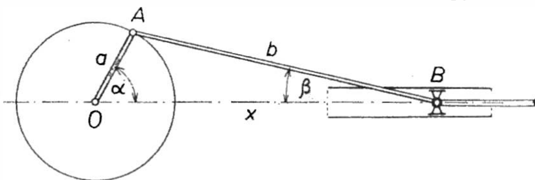
AA_1 gerenda hossza 4 m,

BB_1 gerendáé pedig 3 m.

A két gerenda C pontban találkozik, mely a föld felszínétől 1 m magasságban van. ($y = 1$ m.) Számítsuk ki a téglafalak távolságát egymástól.



22. ábra



23. ábra

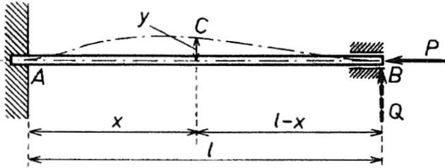
57. Az egyenletes szögsebességgel forgó $OA = a$ forgattyúkarhoz csuklósan kapcsolt $AB = b$ hajtórúd B keresztfejének mely helyzetben (α hajlásszög mely értékénél) legnagyobb a sebessége? Legyen (23. ábra)

$$k = \frac{a}{b} = 0{,}2.$$

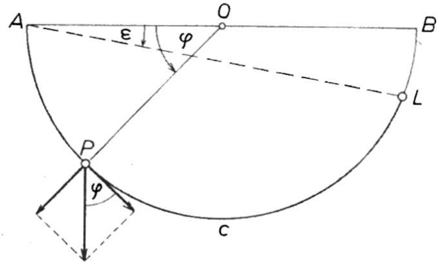
Megszabott pontosság: 0,1°.

58. *Nyomott rúd kihajlása.* Az AB rúd A végén be van fogva. B vége súrlódásmentesen csúszhatik egy vezetékben (24. ábra szerint).

Meghatározandó a legkisebb P erő, amely a rudat kihajlítja.



24. ábra



25. ábra

59. A függőleges síkban elhelyezett ACB félkör alakú pályán az A pontból a $t = 0$ időpontban 0 kezdősebességgel elindul az m tömegű pontszerű test, és a nehézségi erő hatása alatt mozog. Milyen magasra emelkedik a mozgás első periódusában (L), ha a súrlódási tényező $\mu = 0{,}15$? (A levegő ellenállását elhanyagoljuk. 25. ábra.)

60. Magasfeszültségű vezetékeknek falakon való átvezetéséhez csőalakú szigetelő testeket használnak. (Átvezető szigetelő.) A cső belsejét az áramvezető fémrúd tölti ki, külső palástját fémhenger borítja, amely a tartószerkezethez van erősítve. A szigetelő testben keletkező térerősség a belső hengerpalástnál a legnagyobb (E_0). A külső és belső hengerpalást közti feszültség az elektrofizika tanítása szerint

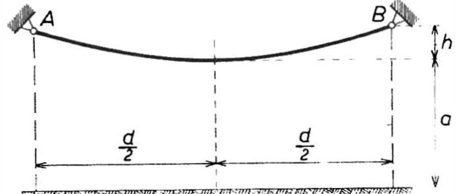
$$U = E_0 r \ln \frac{R}{r}, \qquad (+)$$

mely egyenletben R és r a külső és belső hengerpalást sugarát jelenti.

Adva lévén az U feszültség és E_0 maximális térerősség, kiszámítandó az $\frac{R}{r} = x$ hányados, amelynél a szigetelő test keresztmetszete: $\pi (R^2 - r^2)$ a legkisebb.

61. Az egymástól 50 m távolságban, egyenlő magasan rögzített A és B pontok között egy huzal van kifeszítve, amelynek belógása $h = 5$ m (26. ábra).

Mekkora a huzal hossza 10^{-2} m pontossággal, ha megnyúlása elhanyagolható?



26. ábra

62. Egy mérési sorozat *valószínű hibája* az az r szám, amelynél a mérési hibák fele kisebb. A valószínűségszámítás tanítása szerint ún. *szabályos eloszlás* esetén:

$$\int_{-r}^{r} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = 2\int_{0}^{r} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

Az integrál a $t = hx$ helyettesítéssel átalakítható.

$$\int_{0}^{hr} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \approx 0{,}443\,113\,5.$$

Számítsuk ki az integrál $hr = z$ felső határát, melyre ez az egyenlet teljesül.

c) Több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerek közelítő megoldása

Az egy ismeretlent tartalmazó egyenletek közelítő megoldására alkalmazott módszerek alapgondolatát több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerek megoldására is lehet alkalmazni.

α) A Newton–Raphson-módszer

az érintő módszer alapgondolatát viszi át több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerek közelítő megoldására.

Legyen

$$f(x, y) = 0$$
$$g(x, y) = 0$$

két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer, amelynek valós megoldásait keressük.

Legyen $x = a$, $y = b$ az egyenletrendszer egyetlen megoldása az

$$a - H \leqq x \leqq a + H$$
$$b - K \leqq y \leqq b + K \tag{4.1}$$

tartományban. Feltesszük, hogy ebben a tartományban léteznek az $f(x, y)$ függvénynek f_x és f_y parciális deriváltjai, és a $g(x, y)$ függvénynek g_x és g_y parciális deriváltjai, továbbá, hogy az ún. függvénydetermináns:

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.2}$$

Jelentse x_0 és y_0 az egyenletrendszer egy közelítő megoldását a (4.1) tartományban:

$$a = x_0 + h$$
$$b = y_0 + k$$

és legyen

$$f(x_0, y_0) = \varepsilon \quad \text{és} \quad g(x_0, y_0) = \delta.$$

Helyettesítsük az $f(x, y)$ és $g(x, y)$ függvényeket elsőfokú *Taylor*-polinomjukkal. elhanyagolván a h és k argumentumokban magasabbfokú tagokat:

$$0 = f(a, b) \approx f(x_0, y_0) + f_x \cdot h + f_y \cdot k,$$

$$0 = g(a, b) \approx g(x_0, y_0) + g_x \cdot h + g_y \cdot k,$$

ahol f_x, f_y, g_x, g_y értékeit az (x_0, y_0) pontban számítjuk ki.

A h és k „javítások" meghatározására szolgál tehát az

$$\varepsilon + f_x h + f_y k = 0$$

$$\delta + g_x h + g_y k = 0$$

egyenletrendszer, amelynek egyértelmű megoldását biztosítja a (4.2) feltétel.

Az eljárást megismételhetjük az $a_1 = x_0 + h$, $b_1 = y_0 + k$ javított közelítő értékekkel.

Az első közelítő értékre nézve sokszor maga a feladat tájékoztatást nyújt. Máskor az $f(x, y) = 0$ és $g(x, y) = 0$ függvénykapcsolatok görbéinek vázlatos felrajzolása segít az első közelítő értékek felkeresésében.

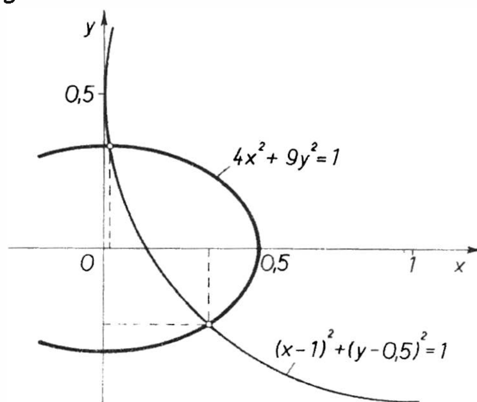
Az eljárás átvihető több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerek megoldására is.

Példa

1.
$$4x^2 + 9y^2 = 1$$

$$(x - 1)^2 + (y - 0{,}5)^2 = 1.$$

Az első egyenlet görbéje derékszögű koordináta-rendszerben a koordináta-tengelyekre szimmetrikus ellipszis, amelynek féltengelyei az x-tengelyen $\frac{1}{2}$ egység, az y tengelyen $\frac{1}{3}$ egység. A második egyenlet görbéje egységsugarú kör az $(1; 0{,}5)$ pont körül (27. ábra). A görbék egyik metszéspontja a $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ pont közelében, a másik az $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ pont közelében fekszik.



27. ábra

Határozzuk meg a másodikat a *Newton—Raphson*-módszerrel.

$$f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 1 \qquad f(0{,}33,\ -0{,}25) \approx -0{,}0019$$

$$g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 0{,}5)^2 - 1 \qquad g(0{,}33,\ -0{,}25) \approx 0{,}0114$$

$$f_x\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) \approx 2{,}64 \qquad f_y\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) \approx -4{,}5$$

$$g_x\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) \approx -1{,}34 \qquad g_y\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) \approx -1{,}5.$$

A javítások meghatározására szolgáló egyenletrendszer

$$-0{,}0019 + 2{,}64\,h - 4{,}5\,k = 0$$
$$0{,}0114 - 1{,}34\,h - 1{,}5\,k = 0.$$

Az egyenletrendszer determinánsa nem zérus; megoldása

$$h \approx 0{,}00541; \qquad k \approx 0{,}00275.$$

A javított közelítő megoldás

$$0{,}33541; \qquad -0{,}24725.$$

Az eljárás megismétlése a javított közelítő megoldásból kiindulva a

$$0{,}335409; \qquad -0{,}247208$$

közelítő megoldásra vezet, amely behelyettesítve az eredeti egyenletrendszerbe

$$4\,x^2 + 9\,y^2 - 1 = 0{,}00000283$$
$$(x-1)^2 + (y-0{,}5)^2 - 1 = 0{,}00000097$$

helyettesítési értékeket szolgáltatja (zérus helyett).

β) Az iterálás módszere a hasonló nevű módszer alapgondolatát viszi át a több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerek közelítő megoldására.

Keressük az

$$f(x, y) = 0$$
$$g(x, y) = 0$$

két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer valós megoldásait. Az egyenletrendszerrel ekvivalens egyenletrendszert írunk fel az

$$x = F(x, y)$$
$$y = G(x, y)$$

alakban. Ez többféleképpen lehetséges. Az iterálás módszere valamely valós (a, b) megoldás közelítő meghatározására biztosan célhoz vezet, ha az $F(x, y)$ és $G(x, y)$ függvények a keresett megoldás környezetében eleget tesznek az

$$|F_x| + |G_x| \leqq m$$
$$|F_y| + |G_y| \leqq m$$

követelményeknek, ahol m egy 1-nél kisebb pozitív számot jelent.[6]

[6] Elég volna kikötni, hogy m nem nagyobb 1-nél.

Jelentse (x_0, y_0) a megoldás környezetének valamely pontját. Az iterálás módszere abban áll, hogy az (x_0, y_0) értékpárból kiszámítjuk az

$$x_1 = F(x_0, y_0)$$

és

$$y_1 = G(x_1, y_0)$$

értékpárt, és az eljárást az (x_1, y_1) értékpárral megismételjük. Az n-edik lépésben az

$$x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1})$$
$$y_n = G(x_n, y_{n-1})$$

értékpárhoz jutunk. Hogy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

a következő meggondolással látható be:

$$a - x_1 = F(a, b) - F(x_0, y_0) \approx (a - x_0)\, F_x + (b - y_0)\, F_y\,,$$
$$b - y_1 = G(a, b) - G(x_0, y_0) \approx (a - x_0)\, G_x + (b - y_0)\, G_y\,,$$

mely képletekben F_x és F_y, valamint G_x és G_y az $F(x, y)$ és $G(x, y)$ függvények parciális deriváltjainak értékeit jelentik az (a, b) pont környezetének valamely alkalmasan választott helyén.

Tehát

$$|a - x_1| + |b - y_1| \leq m \left\{ |a - x_0| + |b - y_0| \right\}$$

Hasonlóan

$$|a - x_2| + |b - y_2| \leq m \left\{ |a - x_1| + |b - y_1| \right\}$$

. . . .

$$|a - x_n| + |b - y_n| \leq m \left\{ |a - x_{n-1}| + |b - y_{n-1}| \right\}$$

és összeszorozva az egyenlőtlenségek bal és jobb oldalain álló kifejezéseket

$$|a - x_n| + |b - y_n| \leq m^n \left\{ |a - x_0| + |b - y_0| \right\}$$

amivel állításunk igazolva van, mert $\lim_{n\to\infty} m^n = 0$.

Megjegyzés: Mennél kisebb m értéke, annál gyorsabban konvergál az iterálás.

Példa

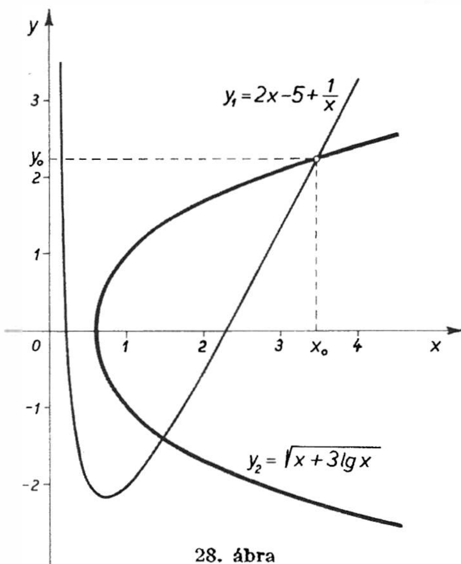
2.

$$x + 3 \lg x - y^2 = 0$$
$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0.$$

Az egyenletek bal oldalán álló függvények görbéit vázlatosan felrajzolva (28. ábra), egyik metszéspont koordinátái közelítőleg

$$x_0 = 3{,}4; \qquad y_0 = 2{,}2.$$

Írjuk fel az ekvivalens egyenletrendszert:



28. ábra

$$x = y^2 - 3 \lg x$$

$$y = \frac{1}{x} + 2x - 5.$$

Ebből

$$F_x \approx -\frac{1{,}3}{x}, \qquad F_y = 2y;$$

$$G_x = -\frac{1}{x^2} + 2, \qquad G_y = 0.$$

Az $(x_0 = 3{,}4;\ y_0 = 2{,}2)$ pontban

$$|F_x| + |G_x|$$

és

$$|F_y| + |G_y|$$

1-nél nagyobb számok. Az iterálás nem is vezet eredményre:

$$x_1 = 3{,}25 \qquad y_1 = 1{,}81$$
$$x_2 = 1{,}74 \qquad y_2 = 0{,}95.$$

Alakítsuk másképpen át az eredeti egyenletrendszert:

$$x = \sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}$$

$$y = \sqrt{x + 3 \lg x}$$

(A négyzetgyökök pozitív értékét kell figyelembe venni.)

Erre az egyenletrendszerre az (x_0, y_0) pontban

$$|F_x| + |G_x| \approx 0{,}825$$
$$|F_y| + |G_y| \approx 0{,}162.$$

Az iterálás a megoldáshoz konvergáló sorozatokra vezet, de a konvergálás lassú, mert 0,825 nem sokkal kisebb 1-nél.

$$x_1 \approx 3{,}426 \qquad y_1 \approx 2{,}243$$
$$x_2 \approx 3{,}451 \qquad y_2 \approx 2{,}2505$$
$$x_3 \approx 3{,}466 \qquad y_3 \approx 2{,}255$$
$$x_4 \approx 3{,}475 \qquad y_4 \approx 2{,}258$$
$$x_5 \approx 3{,}480 \qquad y_5 \approx 2{,}259$$
$$x_6 \approx 3{,}483 \qquad y_6 \approx 2{,}260.$$

Feladatok

1. Számítsuk ki a

$$2x^3 - y^2 - 1 = 0$$
$$x \cdot y^3 - y - 4 = 0$$

egyenletrendszer valós megoldását 3 tizedes pontossággal.

2. Számítsuk ki a

$$\sin x = y - 1{,}32$$
$$\cos y = x - 0{,}85$$

egyenletrendszer valós megoldását 3 tizedes pontossággal.

3. Számítsuk ki az

$$x = \ln\frac{y}{z}$$
$$y = 3 + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{9}$$
$$z = 1 + \frac{xy}{10}$$

egyenletrendszer megoldását 3 tizedes pontossággal az

$$x = 1, \quad y = 3$$

pont közelében.

4. Határozzuk meg a

$$4{,}2\,x^2 + 8{,}8\,y^2 = 1{,}42$$

ellipszis és az

$$(x - 1{,}2)^2 + (y - 0{,}6)^2 = 1$$

kör két valós metszéspontjának koordinátáit 2 tizedes pontossággal.

5. Határozzuk meg a (10, 12, 15) pont legrövidebb távolságát a

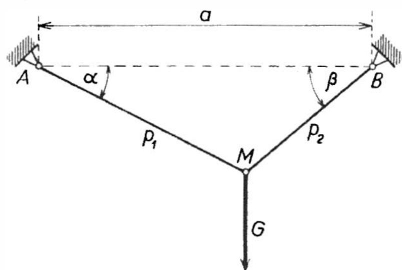
$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$$

paraboloidtól.

6. Számítsuk ki a

$$z^3 - 4z - 5 = 0$$

egyenlet valós és komplex gyökeit.



29. ábra

7. A rugalmas súlytalan kötél egyik végét az A, másik végét a B ponthoz erősítjük. A rugóállandó $c = 50$ kg/m. Az M pontban $G = 80$ kg húzza a köteleket. AM kötél hossza $p_1 = 5$ m, BM kötél hossza $p_2 = 3{,}6$ m.

$$a = AB = 7{,}2 \text{ m}.$$

Határozzuk meg az egyensúlyi állapotnak megfelelő α és β szögeket (29. ábra).

5. §. GRAFIKUS MÓDSZEREK

a) Bevezetés

A derékszögű háromszög átfogóját a megadott befogókból körzővel és vonalzóval „elvileg" hibátlanul meg lehet szerkeszteni. A megoldást mégis csak közelítőnek fogadjuk el, mert érzékszerveink és műszereink tökéletlensége miatt az eredmény többékevésbé pontatlan. Minthogy a szerkesztésből származó hibát sem becsülni, sem tetszésünk szerint csökkenteni nem tudjuk, a grafikus módszerek alkalmazhatósága korlátolt. Sokszor használunk azonban szerkesztéseket „első közelítések" meghatározására, amelyeket azután numerikus eljárásokkal finomítunk.

Elvileg hibátlannak nevezzük a szerkesztő eljárást, ha azzal a eladatot véges számú lépésben vonalzóval és körzővel végzett alapszerkesztések egymásutánjával a síkon (a rajzlapon) meg lehet oldani.[1]

Alapszerkesztéseknek nevezzük:

1. két egyenes metszéspontjának megjelölését;
2. két pont összekötését egyenessel;
3. kör rajzolását adott pont körül adott sugárral;
4. kör és egyenes metszéspontjainak megjelölését;
5. két kör metszéspontjainak megjelölését.

Hogy műszaki feladatokat grafikusan megoldhassunk, a feladatban szereplő mennyiségeket ábrázolnunk kell, vagyis azoknak a rajzlapon távolságokat — esetleg szögeket — feleltetünk meg. Hogy ez a megfeleltetés hogyan történjék, elsősorban a feladat természetétől függ. De függ a szerkesztő ügyességétől is, aki a szerkesztés berendezésében egyes elemeket *önkényesen* választhat. Önkényes a rajz elhelyezése a rajzlapon, tehát a szerkesztő úgy igyekszik elhelyezni, hogy a rajz minden részlete jól szerkeszthető legyen. Önkényesen választható meg a „lépték", amely meghatározza, hogy a feladatban szereplő mennyiségek — pl. erők — valamely egységének — pl. 100 kg erőnek — milyen hosszú vonaldarab feleljen meg a rajzban. Ha a szerkesztésben előjeles távolságok szerepelnek, önkényesen választható meg a pozitív irány. Önkényesen alkalmazhat a szerkesztő egyenlőközű vagy valamely más függvényskála szerint beosztott számvonalakat.

A rajzon minden önkényesen megválasztott rajzelemet félre nem érthető módon fel kell tüntetni (pl. a léptéket, a pozitív haladás vagy forgás irányát, a függvényskálát).

[1] Jogos volna más megállapodás is, pl. ha csak vonalzó vagy csak körző, vagy ha — ellenkezőleg — még más segédeszköz használatát is megengednők.

α) Racionális műveletek

I°. S k a l á r i s m e n n y i s é g e k (grafikus) ö s s z e a d á s á t (kivonását) a számvonalon végezzük, miután a léptéket és a pozitív irányt megválasztottuk.

Alapvető az összeadást definiáló

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

egyenlet (30. ábra), melyből következik, hogy

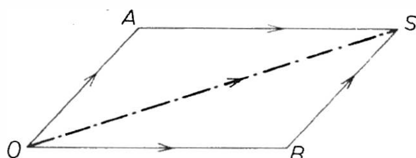
$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$

és

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$



30. ábra



31. ábra

II°. V e k t o r - m e n n y i s é g e k ö s s z e a d á s a (kivonása) a paralelogramma-elv alapján történik. Alapvető a következő 31. ábra:

A vektori összeadás értelmezéséből következik, hogy

$$\vec{OA} = -\vec{AO}$$

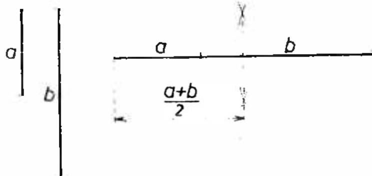
és több vektor összeadására

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{OC}.$$

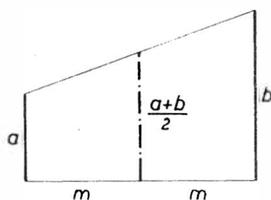
P é l d a

1. Megszerkesztendő az a és a b (rajzban megadott) távolságok számtani (aritmetikai) középarányosa: $\frac{a+b}{2}$.

A 32. ábra a megszokott szerkesztést mutatja. A 33. ábra a trapéz középvonalának tulajdonságán alapszik és különösen nomogramokban használatos.



32. ábra



33. ábra

III°. O s z t ó p o n t s z e r k e s z t é s e a d o t t o s z t ó v i s z o n y b ó l. Szerkesztendő az AB egyenes C pontja, melynek osztóviszonya az A és B alappontokra vonatkoztatva az előjeles v szám:

$$v = \overline{AC} : \overline{CB}.$$

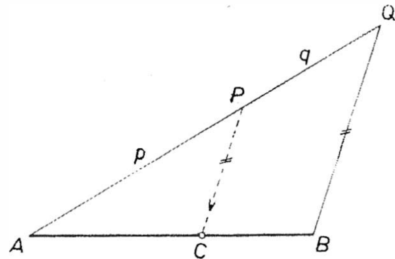
Az osztóviszony pozitív szám, ha C az A és B pontok között van; különben negatív.

Feltesszük, hogy v racionális szám, a p és q egész számok hányadosa: $v = p : q$. Ha az osztóviszony irracionális, akkor vagy hibátlanul megszerkeszthető, mint pl. $\sqrt{2} : 1$, vagy egész számok hányadosával tetszőlegesen megközelíthető.)

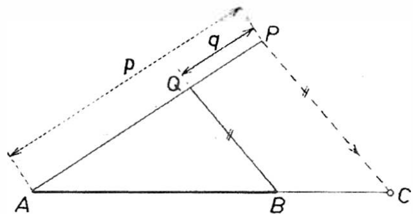
A megoldást a 34. ábra mutatja, ha $p : q$ pozitív, és a 35. ábra, ha $p : q$ negatív.

Az A ponton át az AB egyeneshez tetszőlegesen hajló egyenest rajzolunk. Erre rámérjük az $AP = p$ távolságot, és a P pontból — előjelére is tekintettel — a $PQ = q$ távolságot. Ha v pozitív, akkor a P pont az A és Q pontokat elválasztja egymástól (34. ábra). Ha v negatív, akkor P pont az A és Q pontokat nem választja el egymástól (35. ábra).

Q pontot összekötjük B-vel és ezzel az egyenessel párhuzamost húzunk a P ponton át. Ez a párhuzamos metszi az AB egyenest a C pontban, amelynek osztóviszonya v.



34. ábra



35. ábra

Példa

2. Az AB súlytalan vízszintes rúd A végpontjában 3 kg, B végpontjában 2 kg súlyerő hat. Határozzuk meg az eredő erő hatásvonalát. *Megoldás:* A hatásvonal S pontja az AB rudat 2 : 3 arányban osztja (36. ábra):

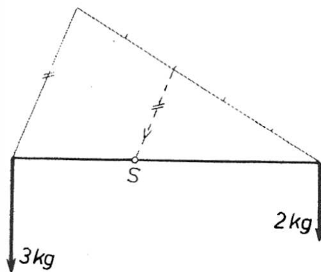
IV°. Adva vannak rajzban az a, b, c előjeles távolságok. Szerkesztendő az

$$u = a \cdot \frac{b}{c}$$

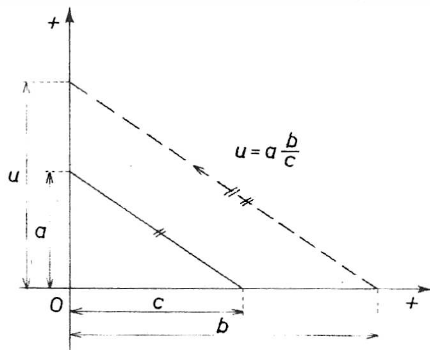
távolság. (37. ábra.)

Ha $c = 1$, akkor a művelet a szorzást, ha pedig $a = 1$, akkor a művelet az osztást ábrázolja.

Ha a vízszintes számvonalon a távolságok másik végpontja az O kezdőponttól jobbra van, azok pozitívok, ellenkező esetben negatívok. Ha a függőleges számvonalon



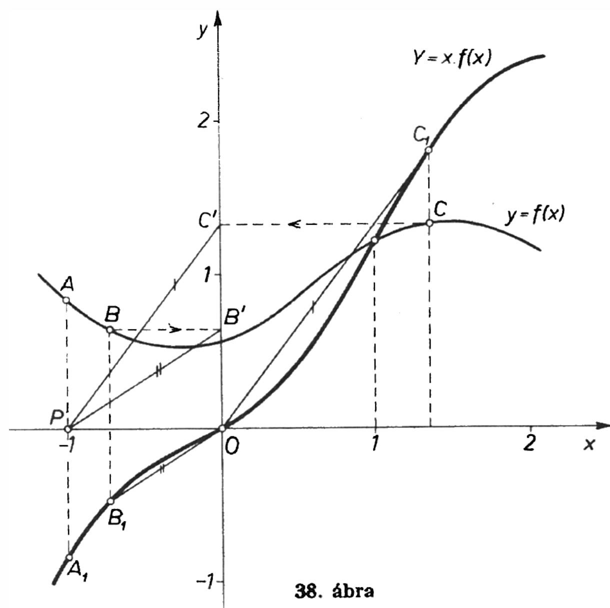
36. ábra



37. ábra

a távolságok másik végpontja az O kezdőpont fölött van, a távolságok pozitívok, ellenkező esetben negatívok. (A megállapodás persze lehetne ellenkező is.) Hasonlítsuk össze a 37. ábrán bemutatott szerkesztést a 34. és 35. ábrán bemutatott szerkesztésekkel.

V°. Megszerkesztendő az $y = f(x)$ függvény görbéjéből az $Y = x \cdot f(x)$ függvény görbéje.



38. ábra

A grafikus megoldást a 38. ábra tünteti fel.

Az $x \cdot f(x)$ görbéjének valamely C_1 pontja az $f(x)$ görbéjének ugyanahhoz az x abszcisszához tartozó C pontjából a következő lépésekben szerkesztendő. (Hasonlítsuk össze a szerkesztést az előző IV°. pontban leírt szerkesztéssel. Az x tengely -1 abszcisszához tartozó P pontját a szerkesztés *pólusának* nevezzük.)

1. lépés: az $f(x)$ görbéjének C pontját az y tengelyre vetítjük. A vetület C'.

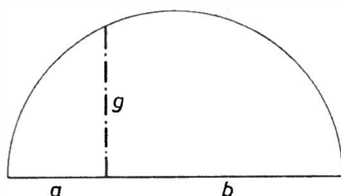
2. lépés: PC' egyenessel párhuzamosat húzunk a koordináta-rendszer O kezdőpontjából.

3. lépés: Ez a párhuzamos metszi a C pont ordinátavonalát az $x \cdot f(x)$ görbéjének C_1 pontjában.

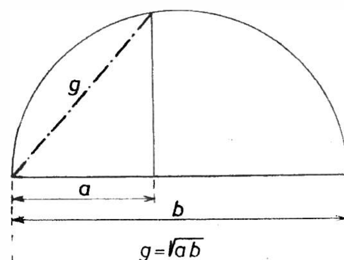
β) Irracionális műveletek

I°. Szerkesztendő a rajzban megadott a és b távolságok geometriai középarányosa: $g = \sqrt{a \cdot b}$.

A szerkesztés a derékszögű háromszög tulajdonságain alapszik. A derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság talppontja az átfogót két részre osztja, amelyeknek geometriai középarányosa a magasság (39. ábra).



39. ábra



40. ábra

A derékszögű háromszög valamely befogója geometriai középarányos az átfogóra ejtett vetülete és az átfogó között (40. ábra).

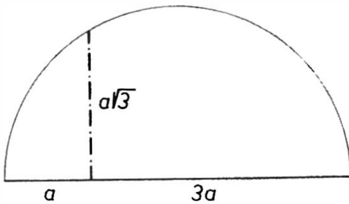
Példák

3. Adva van rajzban az a távolság. Megszerkesztendő az $a \cdot \sqrt{3}$ távolság.

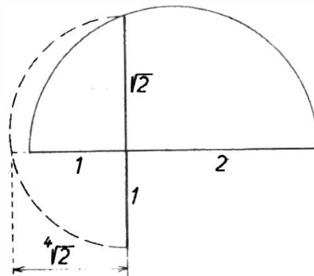
Megoldás: A szerkesztendő távolság geometriai középarányos a és $3a$ között (41. ábra).

4. Megszerkesztendő $\sqrt[4]{2}$ dm.

Megoldás: A szerkesztendő távolság geometriai középarányos 1 dm és $\sqrt{2}$ dm között (42. ábra).



41. ábra



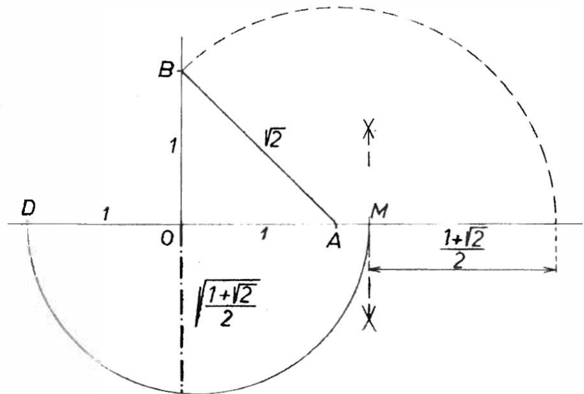
42. ábra

Lépték: 1 : 8.

5. Határozzuk meg szerkesztéssel a

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$ dm távolságot.

Megoldás: a 43. ábrán. Első lépésben meghatározzuk $\sqrt{2}$ dm-t, mint az OAB derékszögű háromszög AB átfogóját, melynek befogói 1 dm-rel egyenlők. A második lépésben megszerkesztjük $\sqrt{2}$ dm és 1 dm számtani középarányosát (OM). A harmadik lépésben megszerkesztjük a második lépés eredményének (OM) és 1 dm hosszú OD-nek geometriai középarányosát.



43. ábra

Lépték: 1 : 5.

b) Polinomok helyettesítési értékének szerkesztése

α) Első módszer: Lill eljárása[2]

A szerkesztés az alapvonalból és a megoldó vonalból áll. Az alapvonal olyan törtvonal, amelynek oldalai a léptékben ábrázolva a polinom együtthatóival rendre egyenlők. Minden következő oldal merőleges az előzőre. Jelkövetkezésnél a 90°-os fordulat az óramutató járásával ellenkező, jelváltásnál megegyező.

Példák

6. Szerkesztendő (44. és 45. ábra)

$$p(x) \equiv x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 4$$

alapvonala.

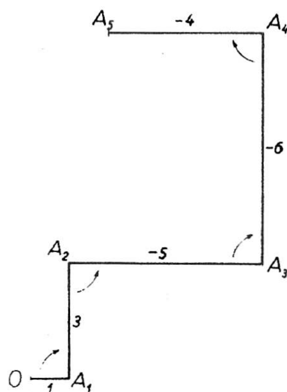
$OA_1 = 1$

$A_1A_2 = 3$ (poz. fordulás)

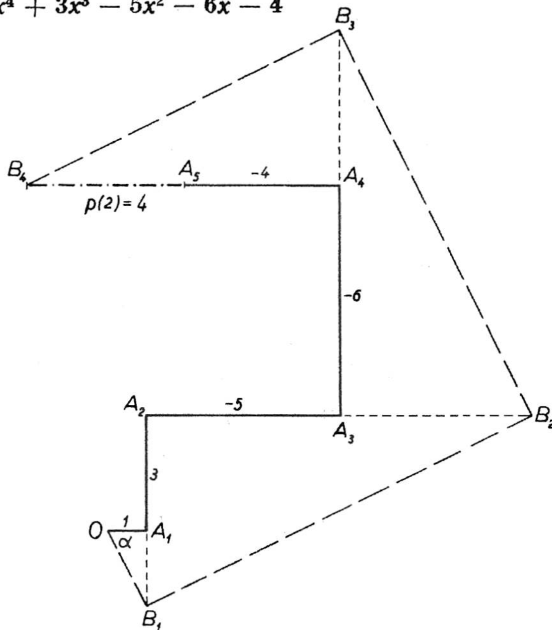
$A_2A_3 = -5$ (neg. fordulás)

$A_3A_4 = -6$ (poz. fordulás)

$A_4A_5 = -4$ (poz. fordulás)



44. ábra



45. ábra

A megoldó vonal hasonló szerkezetű törtvonal, mint az alapvonal; csúcsait az határozza meg, hogy a megoldó vonal az alapvonalba van beírva.

Ha a polinom helyettesítési értékét keressük a (pozitív) $x = 2$ helyen, az alapvonal kezdőpontjából olyan sugarat kell húznunk, amely az alapvonal kezdősugarára kerül, ha pozitív értelemben $\alpha = \text{arc tg } 2$ szöggel elforgatjuk.

Az $OB_1B_2B_3B_4$ megoldó vonal első oldala az A_1A_2 egyenesen végződik a B_1 pontban. A merőleges második oldal az A_2A_3 oldalon végződik a B_2 pontban, a harmadik oldal az A_3A_4 egyenesen a B_3 pontban, végül az utolsó oldal az A_4A_5 oldalon a B_4 pontban. A polinom helyettesítési értéke a

$$\overline{B_4A_5}$$

[2] Ez a szerkesztés előkészíti a zérushely közelítő megszerkesztését. Sokszor csak ez utóbbit nevezik *Lill* eljárásának.

távolság mérőszáma, amelynek előjele aszerint egyezik vagy ellenkezik A_4A_5 előjelével, hogy B_4A_5 iránya is egyezik-e vagy ellenkezik A_4A_5 irányával.

Helyettesítsünk a polinomban x helyébe 2-t.

Megjegyzés. Ha a polinom valamely együtthatója zérus, ennek az együtthatónak az alapvonalban megfelelő szakasz hossza $= 0$. Mégsem szabad a megoldó vonal szerkesztésénél ennek az együtthatónak megfelelő — bár zérus hosszúságú — szakasz tartóját kihagyni. Jobb megértésre szolgáljon a következő példa.

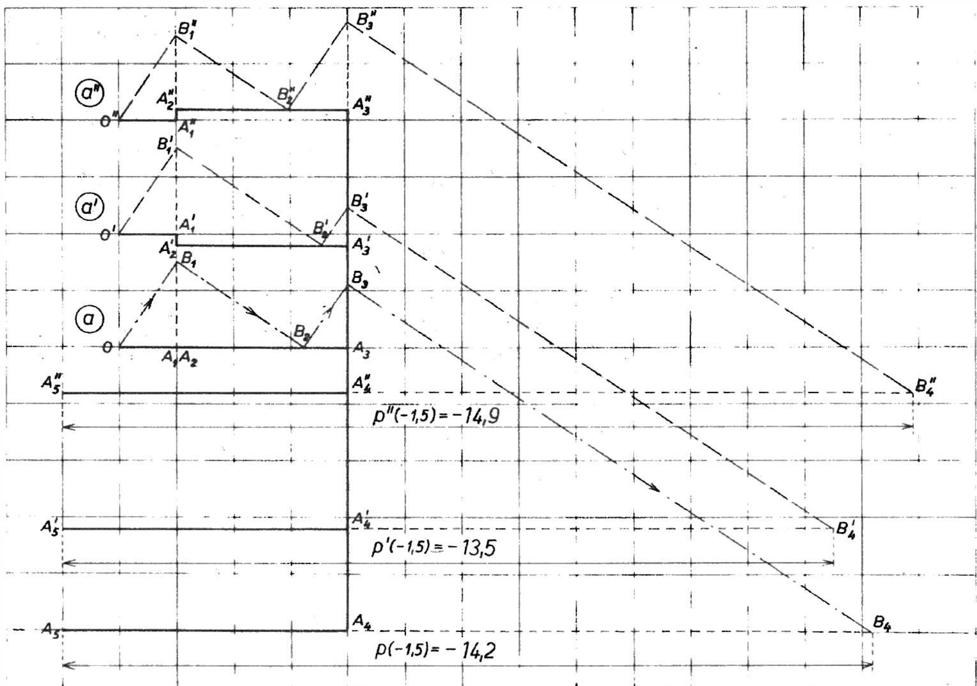
7. Szerkesszük meg

$$a'')\qquad p''(x) = x^4 + 0{,}2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 5,$$

$$a')\qquad p'(x) = x^4 - 0{,}2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 5,$$

$$a)\qquad p(x) = x^4 \qquad\qquad - 3\,x^2 + 5\,x - 5$$

polinomok helyettesítési értékét az $x = -1{,}5$ helyen (46. ábra). Az alapvonal az



46. ábra

a'') esetben az A_1'' pontban törik, és pozitív irányban fordul el;

a') esetben az A_1' pontban törik, és negatív irányban fordul el;

a) esetben nem törik: $A_1 = A_2$; mindamellett ki kell egészíteni az alapvonalat az A_1 pontban az OA_1 szakaszra merőlegesen álló egyenessel.

A megoldó vonal első töréspontja: B_1 ráesik erre a merőlegesre. (Hasonlítsuk össze a három esetnek megfelelő ábrákat.)

Az *a)* esetben

$OA_1 = 1,$
$A_1A_2 = 0,$
$A_2A_3 = -3,$ (jelváltás: forgás negatív)
$A_3A_4 = 5,$ (jelváltás: forgás negatív)
$A_4A_5 = -5.$ (jelváltás: forgás negatív).

Az ábrából leolvasva

$$p''(-1{,}5) = B_1''A_5'' = (\text{sgn.}\, A_1''A_5'') \cdot 14{,}9 = -14{,}9.$$
$$p'(-1{,}5) = B_1'A_5' = -\ 13{,}5.$$
$$p(-1{,}5) = B_4A_5 = -\ 14{,}2.$$

β) A Lill-szerkesztés polinomok zérushelyeinek (algebrai egyenletek gyökeinek) közelítő meghatározására

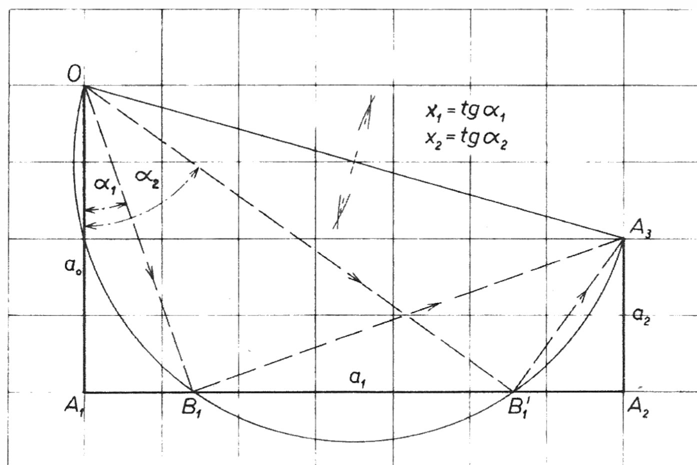
Ha a megoldó vonal végső pontja megegyezik az alapvonal végső pontjával, a polinom helyettesítési értéke 0, a behelyettesített argumentum tehát zérushely (gyök).

Néhány kísérlet után gyakorlott rajzoló könnyen meg tudja határozni a gyökök közelítő értékeit.

Másodfokú egyenlet gyökei kísérletezés nélkül szerkeszthetők.

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

egyenlet gyökeinek szerkesztését mutatja a 47. ábra. Az alapvonal $OA_1A_2A_3$ törtvonal. A megoldó vonal kezdőpontja O, végső pontja B_2 azonos A_3-mal, B_1 pontja tehát az A_1A_2 egyenesen van, és az OB_1B_2 szög derékszög. Eszerint a B_1 pont az OA_3



47. ábra

átmérő fölé rajzolt kör metszéspontja az A_1A_2 egyenessel. Ilyen metszéspont vagy kettő van (két valós megoldás), vagy egy sincs (nincs valós megoldás), vagy végül egyetlen valós megoldás van, ha a kör érinti az A_1A_2 egyenest. Valós megoldások esetén előjelre is tekintettel

$$x_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{A_1B_1}{OA_1};$$

$$x_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{A_1B_1'}{OA_1}.$$

A 47. ábra a $4x^2 + 7x + 2 = 0$ numerikus együtthatókkal felírt egyenlethez van szerkesztve. A közelítő megoldások

$$x_1 \approx -\frac{1{,}35}{4} \approx -0{,}338;$$

$$x_2 \approx -\frac{5{,}6}{4} \approx -1{,}4.$$

γ) Második módszer: a Segner-szerkesztés

Szerkesszük meg

$$p(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

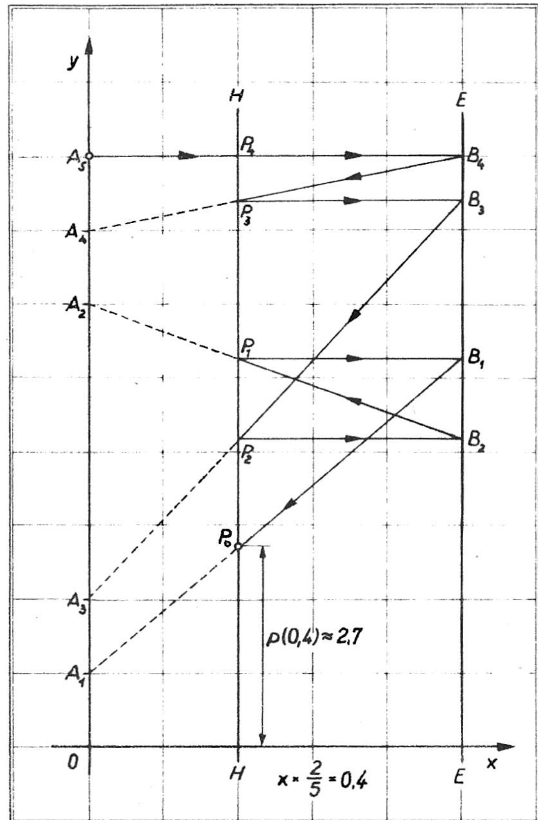
helyettesítési értékét az $x = 0{,}4$ helyen (48. ábra).

A szerkesztés menete:

Az OX egyenesen felvesszük önkényesen az E pontot és a H pontot úgy, hogy osztóviszonya az O és E alappontokra vonatkoztatva x legyen $\frac{OH}{OE} = x$. (Az ábrán $x = 0{,}4$.) O, H és E pontokon át merőlegeseket emelünk az OX egyenesre.

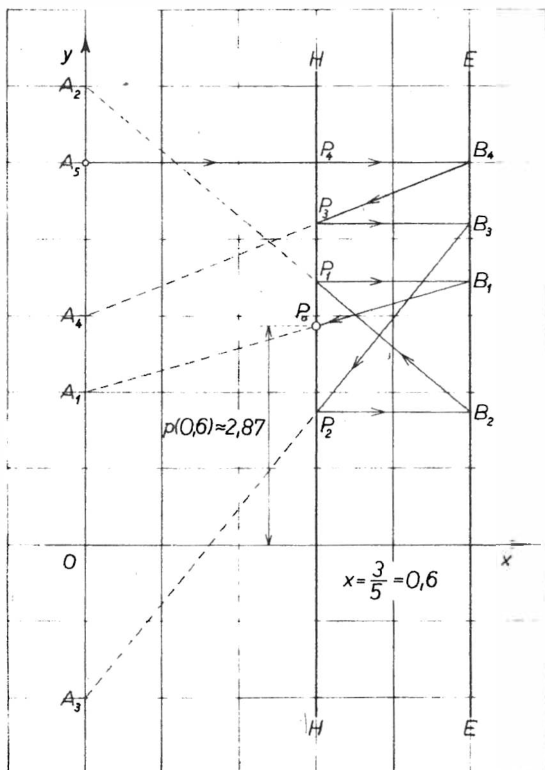
Az OY egyenesre rendre rámérjük az

$$OA_1 = a_0;$$
$$A_1A_2 = a_1;$$
$$A_2A_3 = a_2;$$
$$A_3A_4 = a_3;$$
$$A_4A_5 = a_4$$



48. ábra

előjeles távolságokat, mintha az $a_0 + a_1 + \dots + a_4$ összeget akarnók grafikusan meghatározni.



49. ábra

Az A_5-ön át párhuzamost húzunk OX-szel; ez metszi a HH egyenest a P-, és az EE egyenest a B_4 pontokban.

A_4B_4 meghatározza a HH egyenesen a P_3 pontot, és P_3 ponton át OX-szel húzott párhuzamos az EE egyenesen a B_3 pontot. Így szerkesztünk tovább, míg A_1B_1 meghatározza a P_4 pontot.

$$HP_0 = p(0{,}4) \approx 2{,}7.$$

A leírt szerkesztő eljárás lényegében megfelel a *Horner*-féle számító elrendezésnek. A szerkesztés levezethető az 5. § *a) α)* V.° alapján is, ahol az $f(x)$ függvényből az $x \cdot f(x)$ függvényt szerkesztettük.

Feladat:

Szerkesszük meg a $p(x) = 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 5x + 2$ polinom helyettesítési értékét az $x = 0{,}6$ helyen (49. ábra).

$$p(0{,}6) \approx 2{,}87$$

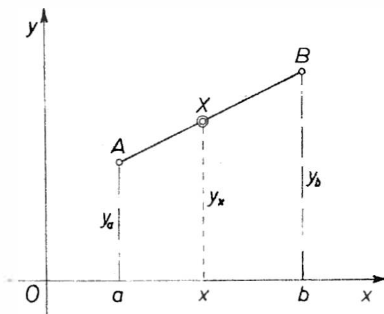
(számítással $p(0{,}6) \approx 3{,}2$).

c) Grafikus interpolálás

α) Interpolálás elsőfokú közelítéssel (lineáris interpolálás)

Az $f(x)$ függvény értékei két helyen vannak adva:

$$f(a) = y_a \text{ és } f(b) = y_b.$$



50. ábra

A függvény értékét az x helyen lineárisan interpolálva meghatározni annyit jelent, hogy a függvény görbéjét húrjával helyettesítjük. A szerkesztést az 50. ábra mutatja.

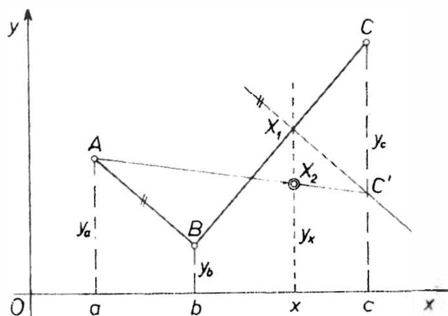
Ha a szerkesztést az $[a, b]$ számközön kívül fekvő x helyen alkalmazzuk — ami ritkábban fordul elő, — *lineáris extrapolálás*ról beszélünk.

β) Interpolálás másodfokú közelítéssel (kvadratikus interpolálás)[3]

Az $f(x)$ függvény értékei 3 helyen vannak adva:

$$f(a) = y_a, \quad f(b) = y_b, \quad f(c) = y_c.$$

A függvény értékét az x helyen kvadratikus interpolálással meghatározni annyit jelent, hogy a függvény görbéjét másodfokú parabolával helyettesítjük, amely a három ponton átmegy, és tengelye párhuzamos az y tengellyel. A szerkesztést az 51. ábra mutatja:



51. ábra

Összekötjük az A és B pontokat, azután a B és C pontokat. Az x abszcisszához tartozó ordinátavonalat a BC húr az X_1 pontban metszi, amely megfelel a lineáris interpolálásnak a B és C pontok között.

X_1 ponton át párhuzamosat húzunk az AB egyenessel, amely a C pont ordinátavonalát a C' pontban metszi. Az AC' egyenes az X_2 pontban metszi az xX_1 ordinátavonalat, melynek ordinátája elvileg pontosan határozza meg $f(x)$ kvadratikusan interpolált értékét.

γ) Interpolálás magasabb fokú közelítéssel

A szerkesztő eljárás a *Newton*-polinommal való numerikus interpolálást grafikusan másolja (86. oldal).

A szerkesztést harmadfokú interpolálás esetére fejtjük ki részletesen. Abból nehézség nélkül általánosítható magasabb fokú interpolálás esetére.

Adva vannak az $f(x)$ függvény értékei 4 helyen:

$$f(a); \quad f(b); \quad f(c); \quad f(d).$$

Szerkesztendő a függvény görbéjének ordinátája valamely x helyen: $f(x)$, abból a föltevésből, hogy az $f(x)$ függvényt azzal a harmadfokú polinommal helyettesítjük, amelynek értékei az a, b, c és d helyeken megegyeznek $f(x)$ értékeivel. Ez a harmadfokú *Newton*-polinom, amelynek numerikus alkalmazásával a 3. §-ban foglalkoztunk. E polinom megszokott alakja:

$$e_0 + e_1 (x - a) + e_2 (x - a)(x - b) + e_3 (x - a)(x - b)(x - c).$$

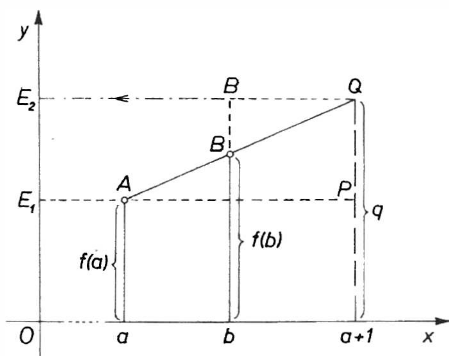
Együtthatóit numerikusan az $f(x)$ függvény osztott differenciáiból határoztuk meg:

$$e_0 = f(a); \quad e_1 = f_1(b); \quad e_2 = f_2(c); \quad e_3 = f_3(d).$$

A szerkesztő megoldás két szakaszból áll: 1. az együtthatók megszerkesztéséből: 2. az interpolált érték megszerkesztéséből.

[3] E. Bálint: Quadratische Interpolation durch graphische Konstruktion. (Die Versicherungsrundschau 1947.)

Az együtthatók megszerkesztése (53. ábra). Az első együttható adva van: $e_0 = f(a)$. Ez az A pont ordinátája, amelyet célszerű az y tengelyre is rávetíteni. Az A pont vetületét az y tengelyen E_1-gyel jelöltük. Az e_1 együttható megszerkesztéséhez az A ponton kívül csak a B pontot kell felhasználni. Ennek koordinátái b és $f(b)$.



52. ábra

Az 52. ábra külön feltünteti az e_1 együttható szerkesztését az A és B pontok segítségével.

Az A és B pontokat összekötő egyenes az $a + 1$ abszcisszához tartozó ordinátavonalat Q pontban metszi, melynek ordinátáját — jelöljük q-val — hasonló háromszögekből számítjuk ki:

$$\frac{q - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1}{b - a},$$

vagyis

$$q = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = e_0 + e_1.$$

Az e_1 együttható tehát úgy szerkeszthető, hogy a Q pont ordinátájából — előjelre is tekintettel — kivonjuk az adott $f(a)$ ordinátát.[4]

Rakjuk fel a q ordinátát a B pont ordinátavonalára — kapjuk a B_2 pontot — és az y tengelyre is — kapjuk az E_2 pontot.

Ahogyan a B_2 pontot a B pont ordinátavonalán, ugyanúgy szerkesztjük a C pont ordinátavonalán a C_2 pontot

$$f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = e_0 + f_1(c)$$

ordinátával és a D pont ordinátavonalán a D_2 pontot

$$f(a) + \frac{f(d) - f(a)}{d - a} = e_0 + f_1(d)$$

ordinátával (53. ábra).

A megszerkesztett három pont: B_2, C_2 és D_2 egy másodfokú polinom görbéjének 3 pontja. Ez a polinom az

$$e_0 + f_1(x) = e_0 + e_1 + e_2 (x - b) + e_3 (x - b) (x - c),$$

ahol $f_1(x)$ jelenti az elsőrendű osztott differenciát.

Az eredeti feladat megoldása még az e_2 és e_3 együtthatók megszerkesztését igényli. Ehhez a szerkesztéshez jól felhasználhatjuk a B_2, C_2 és D_2 pontokat, amelyek az

$$e_0 + f_1(x)$$

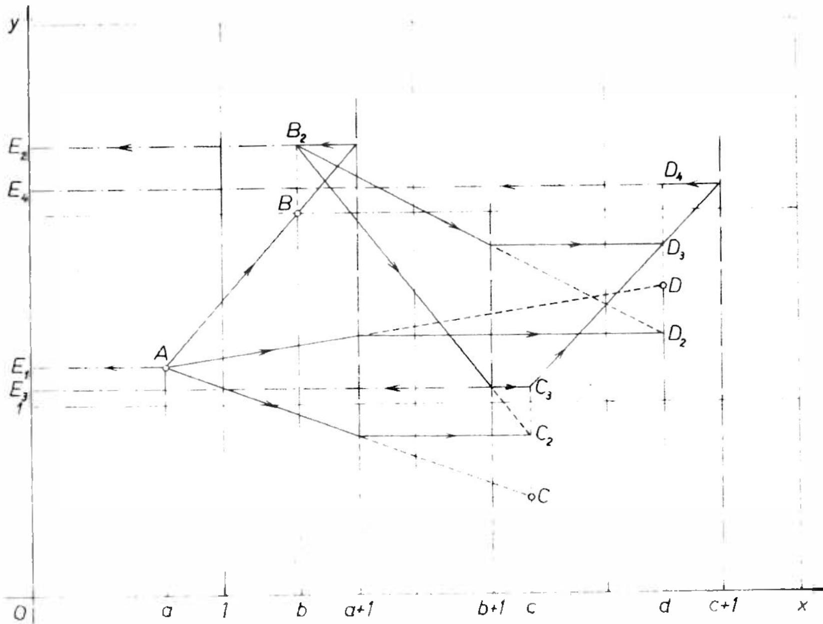
másodfokú polinomot és annak görbéjét egyértelműen meghatározzák.

[4] A két ordináta különbsége éppen az elsőrendű osztott differencia: $f_1(x)$ értéke $x = b$ helyen.

Ismételjük az A és B pontokra eredetileg alkalmazott szerkesztést a B_2 és C_2 pontokra. Ezzel a C_2 pont — tehát egyszersmind a C pont — ordinátavonalán egy C_3 pontot kapunk, amelynek ordinátája

$$e_0 + e_1 + \frac{f_1(c) - f_1(b)}{c - b} = e_0 + e_1 + e_2 .$$

C_3 pont ordinátájának és B_2 pont ordinátájának különbsége tehát éppen e_2 (a két hiányzó együttható közül az egyik).



53. ábra

A szerkesztést a B_2 és D_2 pontokra ismételve a D_2 pont ordinátavonalán D_3 ponthoz jutunk, amelynek ordinátája

$$e_0 + e_1 + \frac{f_1(d) - f_1(b)}{d - b} = e_0 + e_1 + e_2 + e_3\,(d - c) .$$

A C_3 és D_3 pontokat összekötő egyenes az

$$e_0 + e_1 + e_2 + e_3\,(x - c)$$

görbéje.

Utolsó lépésként tehát a szerkesztést a C_3 és D_3 pontokra ismételve a D_3 ordinátavonalán a D_4 ponthoz jutunk, amelynek ordinátája

$$e_0 + e_1 + e_2 + e_3 .$$

D_4 ordinátájából kivonva C_3 ordinátáját kapjuk a keresett e_3 együtthatót.

A szerkesztés második szakasza: *a helyettesítési érték megszerkesztése,* miután a *Newton*-polinom együtthatóit már megszerkesztettük.

Felrakjuk az ordinátatengelyre az E_1, E_2, E_3, E_4 pontokat, ahol előjelre is helyesen

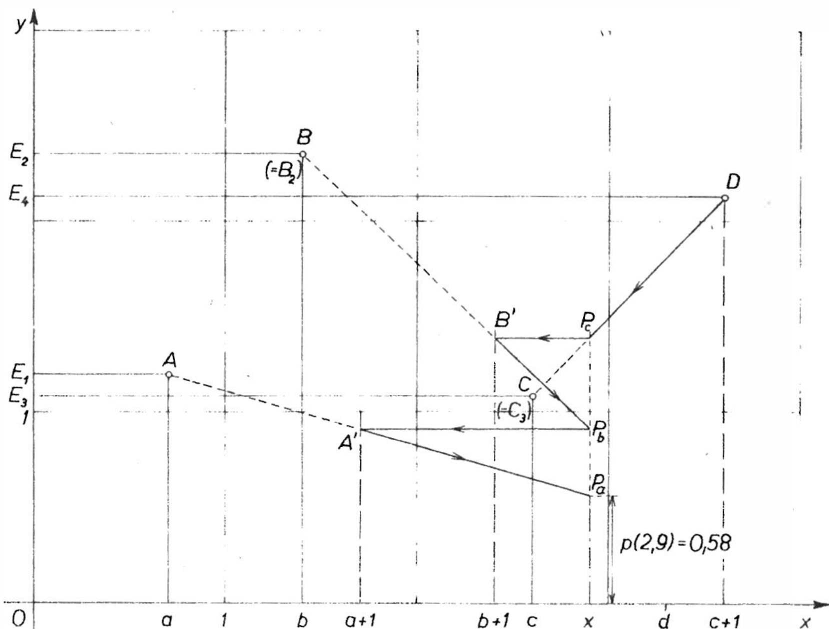
OE_1 jelenti az e_0,
E_1E_2 jelenti az e_1,
E_2E_3 jelenti az e_2,
E_3E_4 jelenti az e_3

együtthatót.

Felrakjuk az x tengelyre az a, b, c és $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$ abszcisszákat, valamint az x abszcisszát, amelyet helyettesíteni akarunk. Az 54. ábra mutatja a szerkesztést, mellyel

$$p(x) = e_0 + e_1 (x - a) + e_2 (x - a) (x - b) + e_3 (x - a) (x - b) (x - c)$$

polinom helyettesítési értékét az x helyen megkapjuk.



54. ábra

Az ábrából látjuk, hogy

az A pont koordinátái	a és e_0
a B pont koordinátái	b és $e_0 + e_1$
a C pont koordinátái	c és $e_0 + e_1 + e_2$
a D pont koordinátái	$c + 1$ és $e_0 + e_1 + e_2 + e_3$.

A szerkesztés első lépése: a D pontot összekötjük a C-vel. Az összekötő egyenes az x abszcisszához tartozó ordinátavonalat a P_c-ben metszi. Megszerkesztjük a $b + 1$ abszcisszához tartozó ordinátavonalon a B' pontot, amelynek P_c-vel egyenlő az ordinátája.

A második lépés: ismételjük az első lépést a B' és B pontok összekötésével és eljutunk az $(a + 1)$ abszcisszához tartozó ordinátavonalon az A' ponthoz.

Az $A'A$ egyenes metszi az x abszcisszához tartozó ordinátavonalat abban a P_a pontban, amelynek ordinátája a keresett helyettesítési érték, tehát a P pont a függvénygörbe pontja.

Példa

8. Adva vannak a harmadfokú $p(x)$ polinom következő értékei:

$$p(0{,}7) = 1{,}2,$$
$$p(1{,}4) = 2{,}0,$$
$$p(2{,}6) = 0{,}5,$$
$$p(3{,}3) = 1{,}6.$$

Szerkesztendő a polinom értéke a 2,9 helyen.

Megoldás: az 53. és 54. ábrák. (Az ábrák szerint $p(2{,}9) = 0{,}58$. Numerikusan 10^{-2} pontossággal 0,60.)

Megjegyzés: Az 54. ábra ráilleszthető az 53. ábrára. A ráillesztésnél az 54. ábra B pontját B_2-re, C pontját C_3-ra kell átbetűzni. Az 54. ábra D pontja az 53. ábrán nincs betűzve.

d) Lineáris függvények több változóval

a) $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ szerkesztése

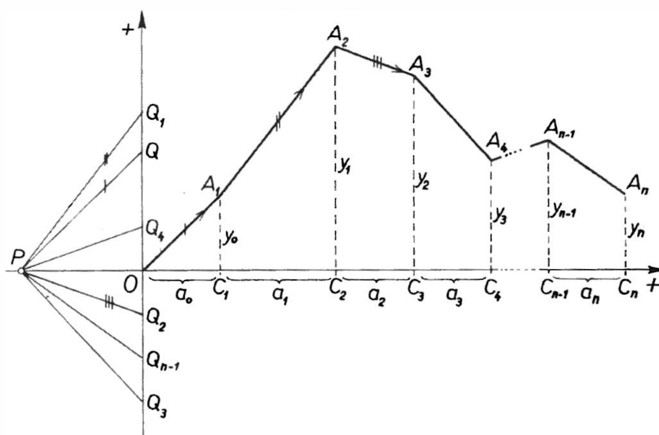
A számvonalon — a „változók tengelyén" — a tetszőlegesen választott O ponttól előjelre is helyesen felrakjuk egy tetszőlegesen választott egységben mérve az $a_0, a_1, \ldots a_n$ együtthatókat, mintha (algebrai) összegüket kellene megszerkeszteni (55. ábra).

O pontban merőlegest emelünk a változók tengelyére. Választunk a változók tengelyén egy P pontot és a merőlegesen a Q pontot úgy, hogy $\overline{PO} = \overline{OQ} > 0$. A merőlegesen felvesszük a $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ pontokat úgy, hogy előjelre is helyesen

$$\frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OQ}} = x_1; \quad \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ}} = x_2; \quad \ldots; \quad \frac{\overline{OQ_n}}{\overline{OQ}} = x_n.$$

$$OA_1 \| PQ$$
$$A_1A_2 \| PQ_1$$
$$A_2A_3 \| PQ_2$$
$$A_3A_4 \| PQ_3$$
$$A_4A_5 \| PQ_4$$

és így tovább.



55. ábra

Hasonló háromszögekből előjelre is helyesen

$$y_0 = C_1A_1 = a_0 \frac{OQ}{PO} = a_0$$

$$y_1 - y_0 = C_2A_2 - C_1A_1 = a_1 \frac{OQ_1}{PO} = a_1x_1, \quad \text{tehát} \quad y_1 = a_0 + a_1x_1$$

$$y_2 - y_1 = C_3A_3 - C_2A_2 = a_2 \frac{OQ_2}{PO} = a_2x_2, \quad \text{tehát} \quad y_2 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

és így tovább.

$$y_n = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Ha A_n rajta van a változók tengelyén ($A_n \equiv C_n$), akkor

$$y_n = 0.$$

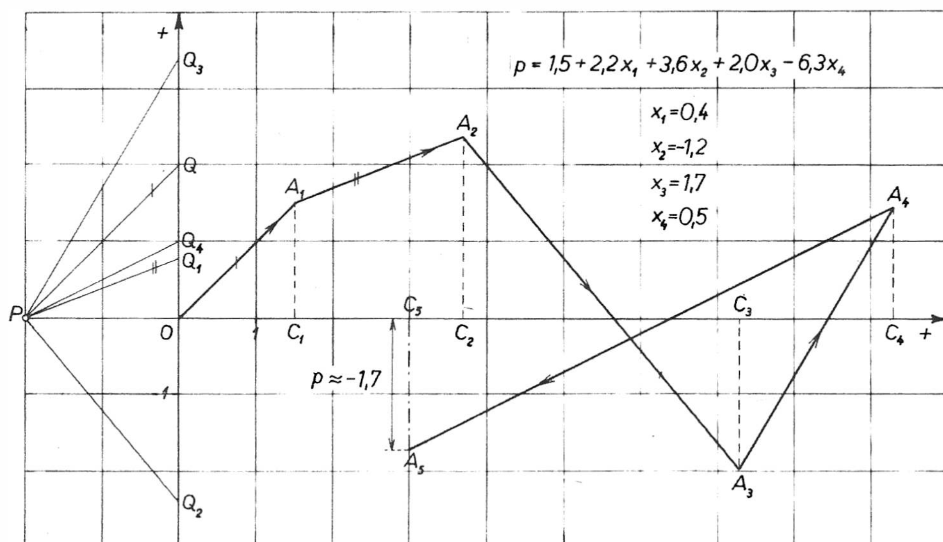
Példák

9. Szerkesszük meg a

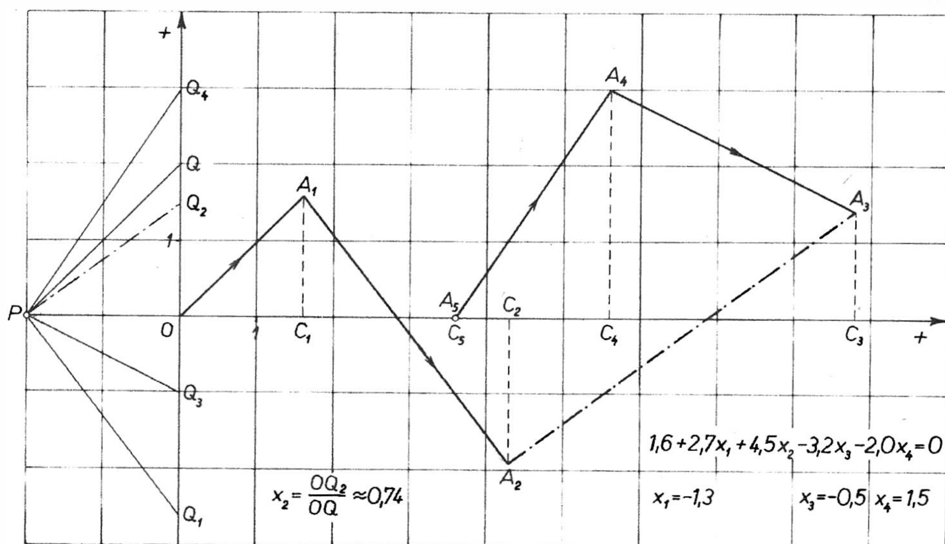
$$p = 1{,}5 + 2{,}2\, x_1 + 3{,}6\, x_2 + 2\, x_3 - 6{,}3\, x_4$$

értékét, ha

$$x_1 = 0{,}4; \quad x_2 = -1{,}2; \quad x_3 = 1{,}7; \quad x_4 = 0{,}5.$$



56. ábra



57. ábra

Megoldás: az 56. ábra. ($p \approx -1{,}7$; pontos megoldás $-1{,}69$.)

10. Szerkesszük meg x_2 értékét úgy, hogy az

$$x_1 = -1{,}3; \quad x_2 = ? \quad x_3 = -0{,}5; \quad x_4 = 1{,}5$$

értékek kielégítsék az

$$1{,}6 + 2{,}7\, x_1 + 4{,}5\, x_2 - 3{,}2\, x_3 - 2\, x_4 = 0$$

egyenletet.

Megoldás: az 57. ábra. Az előbbi példában már alkalmazott szerkesztéssel megrajzoljuk az

$$OA_1A_2$$

törtvonalat, ahol a szerkesztés megszakad, mert x_2 értékét nem ismerjük. Tudjuk azonban, hogy a törtvonal A_5 végpontjának össze kell esnie C_5-tel. Innen visszafelé megszerkesztjük az

$$A_5A_4A_3$$

törtvonalat.

Az A_2A_3 összekötő egyenessel párhuzamos a pólusból induló PQ_2, melynek Q_2 végpontja meghatározza x_2-t:

$$x_2 = \frac{OQ_2}{OQ} \approx 0{,}74.$$

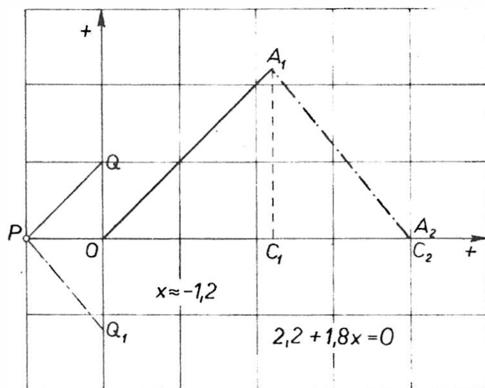
β) Lineáris egyenletrendszerek grafikus megoldása (grafikus eliminálás)

Feladatok

1. Oldjuk meg grafikusan az egy ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletet:

$$2{,}2 + 1{,}8\, x = 0$$

Megoldás: az 58. ábra. ($x \approx -1{,}2$.)



58. ábra

2. Oldjuk meg grafikusan a (speciális szerkezetű) két ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 3{,}5 + 5{,}0\, x \phantom{- 2{,}0y} &= 0 \\ 1{,}2 + 5{,}5\, x - 2{,}0y &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás: 59. ábra.

Az első egyenletből szerkesztjük az OA_1A_2 törtvonalat, amelynek utolsó szakasza határozza meg az

$$x \approx -0{,}7$$

gyököt.

Ezután a második egyenletből szerkesztjük meg az $OB_1B_2B_3$ törtvonalat, amelynek utolsó szakasza határozza meg az

$$y \approx -1{,}3$$

gyököt.

Könnyű általánosítani a szerkesztést az

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x \qquad\qquad &= 0 \\ b_0 + b_1x + b_2y \qquad &= 0 \\ c_0 + c_1x + c_2y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

alakú egyenletrendszerekre.

* * *

59. ábra

* * *

Általános alakú egyenletrendszer visszavezetése az előbbi feladatokban megoldott speciális alakú egyenletrendszerekre grafikus eliminálással (kiküszöböléssel).

Helyettesítsük az

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2y &= 0 \\ b_0 + b_1x + b_2y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyik egyenletét olyan egyenlettel, amely az y ismeretlent nem tartalmazza. Az új egyenletrendszernek az eredetivel „ekvivalensnek" kell lennie (60. ábra).

60. ábra

Az a és b párhuzamos egyeneseken a szokott módon valamely tetszőlegesen választott kezdőponttal és tetszőlegesen választott egységgel mérve előjelre is helyesen felrakjuk a két egyenlet együtthatóit.

Kössük össze az A_0 és B_0

A_1 és B_1

A_2 és B_2

A_3 és B_3 pontokat és messük az összekötő egyeneseket a c egyenessel, amely párhuzamos az a és b egyenesekkel. A metszéspontok: C_0, C_1, C_2, C_3. Legyen valamely tetszőleges egységgel mérve

$$C_0C_1 = c_0; \ C_1C_2 = c_1; \ C_2C_3 = c_2.$$

Akkor

$$c_0 + c_1x + c_2y = 0$$

egyenlettel helyettesítve az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletét, ekvivalens egyenletrendszerhez jutunk.

Bizonyítás: Felírjuk a trapézterületek között fennálló egyenletet:

$$A_0A_1C_1C_0 + C_0C_1B_1B_0 = A_0A_1B_1B_0.$$

Jelentse h, k és l rendre (helyes előjellel) az

a és c

c és b

a és b

egyenesek távolságát egymástól. Akkor

$$h \cdot \frac{a_0 + c_0}{2} + k \cdot \frac{c_0 + b_0}{2} = l \cdot \frac{a_0 + b_0}{2}$$

$$c_0 = \frac{k}{l} a_0 + \frac{h}{l} b_0.$$

Ugyanígy kiszámítható $c_1 = \frac{k}{l} a_1 + \frac{h}{l} b_1$ stb., amiből állításunk következik.

Mivel c egyenest bárhol választhatjuk — párhuzamosan az a és b egyenesekkel — a szerkesztést úgy is berendezhetjük, hogy c egyenes az A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek M metszéspontján menjen át. Akkor azonban az új egyenletben $c_2 = 0$, tehát a második ismeretlen ki van küszöbölve. Helyettesítsük az első egyenletet ezzel az új egyenlettel és feladatunk a speciális típusú egyenletrendszerre van visszavezetve, amelynek grafikus megoldását az előző feladatokban tárgyaltuk.

Könnyű belátni, hogy az eljárást a több ismeretlent tartalmazó rendszerekre át lehet vinni.

Az eljárás elemzése. Ha az A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek párhuzamosak, a szerkesztés csődöt mond. Sikerülhet azonban ehelyett az első ismeretlen kiküszöbölése. Ha azonban

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3,$$

akkor egyik ismeretlent sem tudjuk kiküszöbölni. Ha az A_0B_0 egyenes is párhuzamos a másik hárommal, a két egyenlet nem lényegesen különböző, egyik a másikból az együtthatóknak valamely konstans számmal való szorzásával állítható elő.

Ha pedig A_0B_0 egyenes nem párhuzamos a másik hárommal, az egyenletrendszer nem oldható meg.

Hasonlóan elemezhető az az eset, ha

$$A_1B_1, \quad A_2B_2 \quad \text{és} \quad A_3B_3$$

egyenesek egy közös véges M pontban metszik egymást.

Ha A_0B_0 egyenes is átmegy az M ponton, a két egyenlet nem különbözik „lényegesen" egymástól. Ha pedig A_0B_0 egyenes nem megy át az M ponton, az egyenletrendszer nem oldható meg.

Példa

11. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletrendszert:

$$4{,}5 + 4{,}5\,x + y - 3{,}8\,z = 0 \qquad (a)$$
$$4 + 2{,}7\,x + 2{,}6\,y - 1{,}3\,z = 0 \qquad (b)$$
$$-1 + 9{,}6\,x - 5{,}1\,y + 3{,}5\,z = 0. \qquad (c)$$

Megoldás: 61. ábra.

Első lépés az a egyenesen felrakjuk az (a) egyenlet,
a b egyenesen felrakjuk a (b) egyenlet,
a c egyenesen felrakjuk a (c) egyenlet
együtthatóit.

Második lépés: Az u egyenesen kiküszöböljük az (a) és (b) egyenletekből a z ismeretlent,

a v egyenesen kiküszöböljük az (a) és (c) egyenletekből a z ismeretlent.

Harmadik lépés: a t egyenesen kiküszöböljük az (u) és (v) egyenletekből az y ismeretlent.

Negyedik lépés: A (t) egyenletből megszerkesztjük x értékét:

$$x \approx -0{,}475.$$

Ötödik lépés: x értékének segítségével az (u) egyenletből megszerkesztjük y értékét:

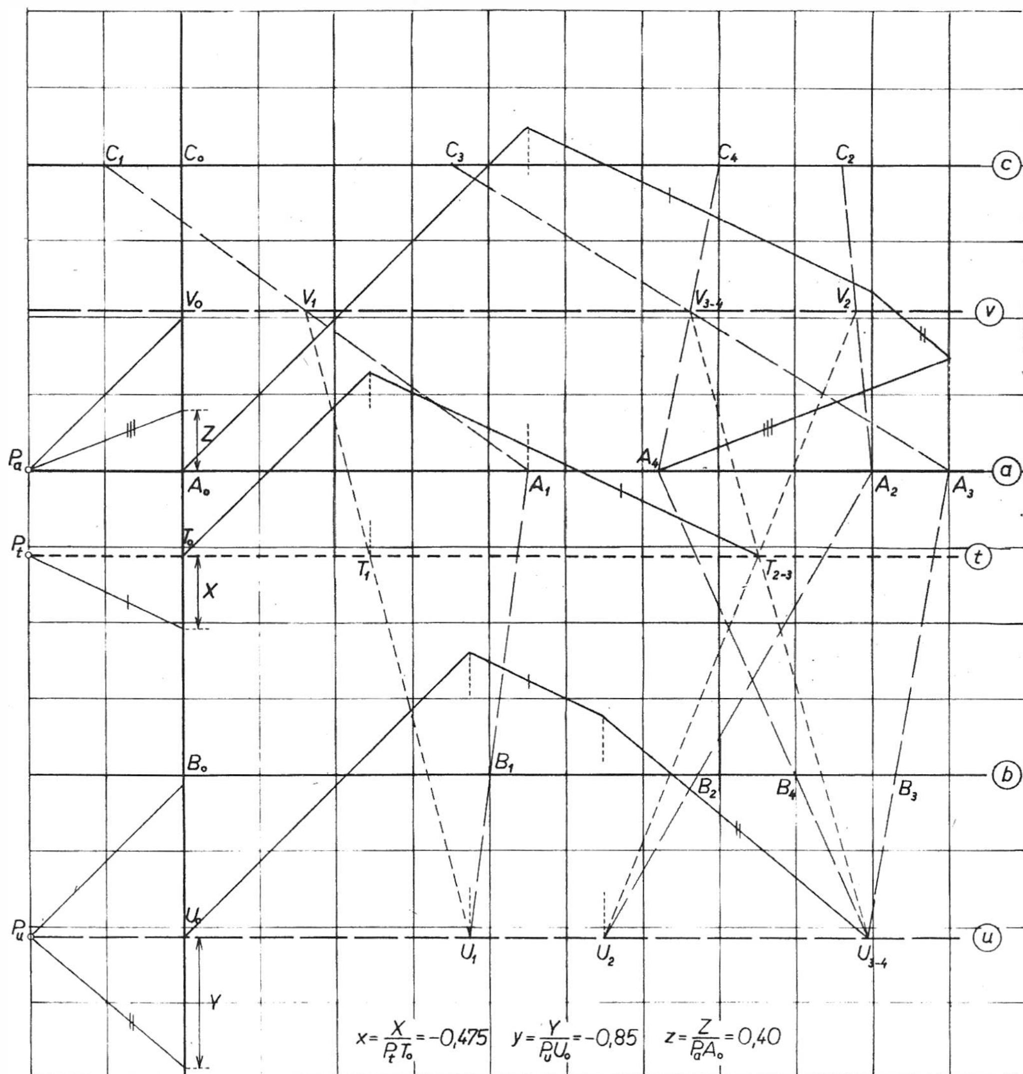
$$y \approx -0{,}85.$$

Hatodik lépés: x és y értékeinek segítségével az (a) egyenletből megszerkesztjük z értékét:

$$z \approx 0{,}40.$$

A szerkesztő ügyességétől sok függ: a jó felvétel, vele a hibaforrások csökkentése, a leolvasás többé vagy kevésbé jó becslése és mindenek fölött a pontos rajzolás.

A grafikus megoldást numerikus módszerekkel lehet tovább javítani



61. ábra

Feladatok az 5. §-hoz

a)

1. Szerkesztendő az $y = x$ függvényt ábrázoló szögfelezőből az $Y = x^2$ $(= x \cdot y)$ függvényt ábrázoló parabola.

2. Szerkesztendő az $y = 1$ függvényt ábrázoló egyenesből az $Y = \frac{1}{x}$ $\left(= \frac{y}{x}\right)$ függvényt ábrázoló hiperbola.

3. Szerkesztendő az $y = \sqrt{x}$ függvényt ábrázoló parabola. (Geometriai középarányos szerkesztéssel.)

4. Szerkesztendő az $y = \ln x$ görbéjéhez valamely A pontban az érintő.

5. Valamely ellipszis féltengelyeinek hossza a és b. Szerkesztendők a tengelypontokban a görbületi (simuló) körök középpontjai. $\left(r_A = \frac{b^2}{a};\ r_B = \frac{a^2}{b}\right)$.

b)

6—12. Oldjuk meg szerkesztéssel a 2. §. 1—7. feladatát.

c)

13. Az

x	0	1	2	3
e^x	1	2,7	7,4	20,1

értékpárokból szerkesszük $e^{1,6}$ értékét.

14. Az

x	1,6	1,8	2,0
y	206	203	234

függvénytáblázatból grafikusan megszerkesztendő a függvény értéke az $x = 1,7$ és az $x = 1,9$ helyeken.

15—22. Oldjuk meg szerkesztéssel a 2. § 52—59. feladatát.

d)

23—36. Oldjuk meg szerkesztéssel a 2. § *c)* 1—8. feladatát, 11—12. feladatát, 15—18. feladatát.

EREDMÉNYTÁR

1. §. A HIBA

a)

1. *a)* 1/300 m; *b)* 1%; *c)* közelítőleg 1,01%.
2. 1/450 többlet; közelítőleg 3‰; 0,005.
3. 2,7183.
4. $2{,}7182 \pm 10^{-4}$ vagy $2{,}7183 \pm 10^{-4}$.
5. $5 \,.\, 10^{-6}$. 6. $5 \cdot 10^{-5}$. 7. 0,016‰.
8. 1 165 000; 37; közelítőleg 0,03‰; 500; közelítőleg 0,43‰.
9. 1 570 500 és 1 571 499.
10. 0,000 213 m; 0,213‰.
11. 172,02μ; durvábban 0,0002 m; 0,2‰.
12. 2,4 mm.
13. 0,10964 m hiány; közelítőleg 0,06‰.
14. 0,00000384 m hiány; közelítőleg 0,002‰.
15. Közelítőleg $8 \,.\, 10^{-5}$ hüvelyk.
16. Közelítőleg 48'' többlet; közelítőleg 0,08‰.
17. 0,05° *Celsius*; 0,04° *Reaumur* 0,09° *Fahrenheit*; 0,05° abszolút hőmérsékletben.
18.

%	2	3	4	5	6
hiba	1,20	2,94	5,71	9,73	15,26
relatív hiba%	1	2,2	3,9	6	8,5

19. 2 dm; 1,6%.
20. 0,00011; 0,00065; 0,00514; a relatív hibák rendre 1,3‰; 4,2‰; 17‰.
21. $6 \cdot 10^{-5}$.
22. *a)* 490 cm/sec^2 többlet; *b)* 490 cm/sec^2 hiány.
23. A kerületre 3 cm és 5%; a területre 55 cm^2 és 21%.
24. 5116 hiány; 46 024.
25. Századrész pontossággal 0,07%, −0,18%, −0,71%, −0,95%.
26. 2,2%.

27. A fogaskerék átmérője 5'' = 127 mm. A modulus 127/50 = 2,54 mm. A relatív hiba 1,6%.

28. 0,02‰ és 0,00012‰.

29. 0,02‰ és 0,012‰.

30. A hiba korlátja $5 \cdot 10^{-5}$. A relatív hiba korlátja rendre 0,166‰, 0,038‰, 0,015‰.

31. 7,61; 0,001; 0,13‰.

32.

x	y	hibakorlát (közös)	relatív hibakorlát x	relatív hibakorlát y
4,07	5,07	0,01	0,25%	0,20%
−3,62	−6,61	0,01	0,28%	0,16%
4,54	−2,85	0,01	0,22%	0,35%

33.

	logarléccel			*logaritmustáblázattal*		
a)	5,22;	0,005;	1 ‰.	5,225;	0,0005;	0,1 ‰.
b)	0,262;	0,0005;	2 ‰.	0,2616;	0,00005;	0,2 ‰.
c)	1,83;	0,005;	3 ‰	1,832;	0,0005;	0,3 ‰.
d)	7,62;	0,005;	0,7‰.	7,618;	0,0005;	0,07‰.

34. 1/90 000; 0,01‰.

35. Majoráns geometriai sorral becsülve a maradéksort 1/4000; 0,1‰.

36. 1%; 1‰.

37. A hidrogénatomnál a hiba korlátja 10^{-27} g, a relatív hibáé közelítőleg 0,06%. Az elektronnál a hiba korlátja 10^{-30} g, a relatív hibáé 0,11%. A hibakorlát az atom mérésénél 1000-szer nagyobb, mint az elektronnál; mégis a mérést megbízhatóbbnak tekintjük az atom mérésénél (a relatív hiba közel fél akkora).

38. Közelítőleg 0,013‰. A megjelölés azért helytelen, mert ellenkező utalás hiányában a közelítő adatnak csak az utolsó értékes jegyét tekintjük bizonytalannak. Nem helytelen azonban, ha a fény sebességét közelítőleg $300 \cdot 10^3$ km/mp-ben adjuk meg.

39. 0%; 0,001%; 0,003%.

40. A logaritmus kikerekítése

$$\begin{aligned} \lg \sin 42^\circ\ 20'\ 20'' &= 9{,}8283469 - 10 \\ \lg \sin 42^\circ\ 20'\ 10'' &= \underline{9{,}8283238 - 10} \\ d &= \quad 231. \end{aligned}$$

Közbeiktatva

$$\lg \sin 42^\circ\ 20'\ 12'' = 9{,}8283284 - 10.$$

A hibakorlát

$$K \approx \frac{232}{10} \cdot 6 + 1 = 140,$$

tehát

$$\lg \sin \alpha = 9{,}8283284 \pm 140 \cdot 10^{-7} - 10.$$

Visszakeresés:

$$9{,}8283312 - 10 = \lg 0{,}67349$$
$$9{,}8283247 - 10 = \lg 0{,}67348$$
$$65 \quad = d.$$

Közbeiktatva

$$9{,}8283284 - 10 = \lg 0{,}673486.$$

A hiba

$$k \approx \frac{10}{64} \cdot 140 + 1 \approx 23,$$

tehát

$$\sin\alpha = 0{,}673486 \pm 23 \cdot 10^{-6}.$$

41. A relatív hiba abszolút értéke $r(x) = \left\{\frac{1}{1+x} - (1-x)\right\} : \frac{1}{1+x} = x^2.$

Ha $x > 0$, a relatív hiba x növekedésével monoton nő, tehát pozitív számközben legnagyobb értékét a számköz jobb szélén veszi fel. Pl. a $(0; 0{,}03)$ számközben a relatív hiba legnagyobb értéke $0{,}03^2 = 0{,}0009 < 0{,}1\%$. Ha $x < 0$, a relatív hiba x növekedésével monoton fogy, tehát negatív számközben legnagyobb értékét a számköz bal szélén veszi fel. Pl. a $(-0{,}3; 0)$ számközben a relatív hiba korlátja $(-0{,}3)^2 = 0{,}09 = 9\%$.

42. A relatív hiba abszolút értéke

$$r(x) = \left(1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}\right) : \sqrt{1+x} = \frac{1 + \frac{x}{2}}{\sqrt{1+x}} - 1.$$

Ennek deriváltja

$$r'(x) = \frac{x}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$$

pozitív, ha $x > 0$;
negatív, ha $-1 < x < 0$.

A relatív hiba abszolút értéke tehát monoton nő, ha $x > 0$ és x növekszik. Pozitív számközben a relatív hiba korlátját a számköz jobb szélén éri el. A relatív hiba abszolút értéke monoton fogy, ha $-1 < x < 0$ és x növekszik. A $(-1; 0)$ számköz részszámközeiben a relatív hiba korlátját a részszámköz bal szélén éri el.

43. A gondolatmenet az előbbi feladat bizonyítását követi.

44. A relatív hiba abszolút értéke

$$r(x) = \frac{x - \sin x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} - 1.$$

Ennek deriváltja

$$\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}(\operatorname{tg} x - x)$$

pozitív, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

negatív, ha $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

A relatív hiba tehát a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ részszakaszaiban jobb szélen éri el korlátját; a $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ részszakaszaiban a bal szélen.

45. A relatív hiba abszolút értéke

$$r(x) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{tg} x} = 1 - \frac{x}{\operatorname{tg} x}.$$

Ennek deriváltja

$$\frac{x - \sin x \cos x}{\sin^2 x}$$

pozitív, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

negatív, ha $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

A bizonyítás további menete követi az előző feladatét.

46. $BD = \sqrt{4r^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30°)^2} = r\sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \approx 3{,}14153\, r.$

A relatív hiba közelítőleg $\frac{6 \cdot 10^{-5}}{3} = 0{,}02‰$. Ha műszereink és érzékszerveink *Kohanszky* szerkesztésének hibátlan kivitelét lehetővé tennék, a 100 m sugarú félkörnél a hiba kb. 6 mm volna.

b)

1. 22,846.

2. A harmadik tagban kijelölt szorzást 4 tizedesre pontosan végezzük el, hogy az összeadásban a megkívánt pontosságot biztosítsuk. Az eredmény 10,393.

3. Az egyes tagok részeredményét 3 tizedesre pontosan kell kiszámítani. Az eredmény: 10,94.

4. Az egyes tagok relatív hibakorlátja rendre

$$1\%;\quad 2\%;\quad 3\%;\quad 4\%,$$

tehát a polinom helyettesítési értékének relatív hibakorlátja 4%.

5. *a)* A logarlécen a leolvasás egyetlen beállítással oldható meg; három értékes jegy olvasható le:

34,6 mm, 235 mm, 281 mm.

b) 34,57 mm (4 értékes jegy)
235,20 mm (5 értékes jegy)
281,18 mm (5 értékes jegy).

Megjegyzés: 9,26" kifejezése mm-ben megszabott pontosságú szorzás eredménye. Ezért a századrészek helyén álló 0 is értékes számjegynek tekintendő.

6. Az első szakasz $2 \cdot 13{,}25 : 27{,}5 = 0{,}96$ km,
a második szakasz 1,45 km,
a harmadik szakasz 2,41 km,
a negyedik szakasz 3,61 km,
az ötödik szakasz 4,82 km,

Próba: 13,25 km.

7. A szorzás műveletét 10^{-6} pontossággal végezve a szorzat

$$12° \, 35' = 0{,}219622.$$

Az öröklött hiba becslésénél az egyik tényező (755') pontosnak veendő, tehát az öröklött hiba kisebb, mint $755 \cdot 5 \cdot 10^{-9} < 4 \cdot 10^{-6}$.

A teljes hiba kisebb, mint $4 \cdot 10^{-6} + 1 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6}$.

8. $x = 0{,}19$; $y = 0{,}69$.

9. $\ln 2 = \lg 2 : \lg e = 0{,}30103 : 0{,}43429$.
Az osztást 10^{-5} pontossággal elvégezve

$$\ln 2 = 0{,}69315.$$

Az öröklött hiba kisebb mint

$$0{,}7\,(5 \cdot 10^{-5} : 3 + 5 \cdot 10^{-5} : 4) \approx 2 \cdot 10^{-5}.$$

A teljes hiba tehát kisebb, mint a műveleti és az öröklött hiba korlátjának összege $3 \cdot 10^{-5}$. Az elért pontosságot a művelet pontosságának fokozásával alig lehet javítani. Valójában az ötödik tizedes jegy is helyes.

10. $\ln 159 = \lg 159 : \lg e = 2{,}2013971 : 0{,}4342945 = 5{,}06890$.
A művelet hibájának korlátja $5 \cdot 10^{-6}$.
Az öröklött hiba kisebb mint 10^{-6}.
A teljes hiba kisebb mint $6 \cdot 10^{-6}$.

11. Sinus tétellel $x = (200 \pm 0{,}01) \dfrac{\sin (60° \pm 1')}{\sin (30° \mp 2')}$

A relatív hibakorlátok (7 jegyű logaritmustáblázattal):

$$r_{\overline{AC}} = 5 \cdot 10^{-5}$$
$$r_{\sin \gamma} = 2 \cdot 10^{-4}$$
$$r_{\sin \beta} = 10^{-3}.$$

Az x hosszúság közelítőleg 346,4 m; az eredmény hibakorlátja közelítőleg

$$346{,}4\,(5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-4} + 10^{-3}) \approx 0{,}43 \text{ m}.$$

12. A 752,673 · 980,852 szorzást egész pontossággal végezve a szorzat

$$mg = 738\,261 \text{ din.}$$

Az öröklött hiba kisebb, mint

$$750\,000\,(0{,}003 : 750 + 0{,}001 : 980) < 4.$$

A teljes hiba kisebb, mint $1 + 4 = 5$ din.

13. $b = 760 \cdot 14652 : 17248$. A megoldás 3 értékes jegyet követel, tehát az osztóból négy értékes jegyet tartunk meg, az osztandóból 5 értékes jegyet kell kiszámítani. Eredmény: 650 mm.

14. A hibakorlát becslésével megállapítjuk, hogy az eredményt az egészek pontosságával lehet kiszámítani. Az eredményben tehát három értékes jegyet követelünk. A nevezőt négy, a számlálót 5 jegyre kell kiszámítani, ezért π^2 három tizedesre számítandó. Eredmény 987 cm/mp^2.

15. A relatív hiba korlátja

$$\frac{0{,}01}{132{,}75} + \frac{2 \cdot 0{,}002}{1{,}152}.$$

Az osztásokat $5 \cdot 10^{-5}$ pontossággal kell végezni. A relatív hibakorlát $3{,}5\,^0/_{00}$.

16. *a)* $F = 5500$ cm^2.

Az adatok relatív hibakorlátai: $r_a = 0{,}0005$

$r_b = 0{,}0004$

$r_c = 0{,}0002$

ab szorzat relatív hibájának korlátja 0,0009

bc szorzat relatív hibájának korlátja 0,0006

ca szorzat relatív hibájának korlátja 0,0007

F relatív hibájának korlátja 0,0022.

A hiba korlátja $5500 \cdot 0{,}0022 = 12{,}1$ cm^2

$$F = 5500 \text{ cm}^2 \pm 12{,}1 \text{ cm}^2.$$

b) $V = abc = 25\,000$ cm^3.

A térfogat relatív hibakorlátja 0,0011.

A hiba korlátja 27,5 cm^3.

$V = 25\,000$ cm$^3 \pm 27{,}5$ cm^3.

17. $2\,t = ab \sin \gamma$.

Ötjegyű szögfüggvénytáblázatból

$$\sin \gamma = 0{,}79441 \pm 0{,}00003.$$

A tényezők relatív hibájának korlátja $r_a < 0{,}00005$,

$r_b < 0{,}00007$,

$r_{\sin \gamma} < 0{,}00004$.

A terület — ha a szorzást egészekre pontosan végezzük —

$$12\,693 \text{ cm}^2.$$

Az öröklött hiba kisebb, mint

$$12\,693\,(0{,}00005 + 0{,}00007 + 0{,}00004) < 3.$$

A műveleti hiba < 1.

A teljes hiba < 4 cm^2.

A terület $t = 12\,693$ cm$^2 \pm 4$ cm^2.

18. Ötjegyű szögfüggvénytáblázatból

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}02221 \pm 6 \cdot 10^{-5}$$

$$t \cdot \operatorname{tg}\alpha = 5{,}016 \text{ m}.$$

(A szorzást 3 tizedesre megszabott pontossággal végezzük.)[1]

A szorzat öröklött hibája közelítőleg $5\left(\frac{4}{22\,585} + \frac{6}{2221}\right)$	$< 0{,}014$
A szorzat műveleti hibája	$< 0{,}001$
A második tag hibája	$\leqq 0{,}005$
A harmadik tag hibája	$\leqq 0{,}010$
A teljes hiba	$< 0{,}030$ m

$$h = 4{,}411 \text{ m} \pm 0{,}030 \text{ m}.$$

A relatív hiba korlátja $= 7^0/_{00}$.

19. Ha az oldal relatív hibakorlátja r_a, akkor a terület relatív hibakorlátja $2 \cdot r_a$.

$$2\,r_a = \frac{15}{1232},$$

$$r_a \approx 0{,}006.$$

Ebből az a adat hibájának korlátja m_a kiszámítható:

$$m_a \approx 0{,}006 \cdot \sqrt{1232} \approx 0{,}21 \text{ m}.$$

20. A teljes hibának kisebbnek kell lennie 10^{-2}-nél, tehát az összeg műveleti hibájának kisebbnek kell lennie 0,0017-nél, az egyes tagok műveleti hibájának 0,00017-nél. Ez biztosítva van, ha az egyes tagokat 4 tizedesre pontosan számítjuk. Az eredmény 0,8180. Valójában $\frac{\pi^2}{12}$ értéke 10^{-4} pontossággal 0,8225.

21.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{20}\left\{1 + \frac{2}{1{,}01} + \frac{2}{1{,}04} + \ldots + \frac{2}{1{,}81} + \frac{1}{2}\right\} \approx 0{,}7849.$$

$$\pi \approx 3{,}1396.$$

[1] *Megjegyzés:* a szorzást 3 tizedesre pontosan célszerű elvégezni. Nagyobb műveleti pontosság az eredmény pontosságát alig javítja, kisebb pedig rontaná.

Hibabecslés: képlethiba $< \frac{1}{300} \approx 0{,}0033$

műveleti hiba $< 9 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 0{,}00045$

teljes hiba $< 0{,}00375$

π közelítő értékének teljes hibája $< 4 \cdot 0{,}00375 = 0{,}015$. Valójában ez a hibakorlát a hibának több mint hétszerese.

22.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{30}\left\{1 + 4\cdot\left(\frac{1}{1{,}01}+\frac{1}{1{,}09}+\ldots+\frac{1}{1{,}81}\right)+ 2\cdot\left(\frac{1}{1{,}04}+\frac{1}{1{,}16}+\ldots+\frac{1}{1{,}64}\right)+\frac{1}{2}\right\} \approx 0{,}785399$$

$\pi \approx 4 \cdot 0{,}785399 = 3{,}141596.$

Hibabecslés: Képlethiba $< 10^{-5}$
műveleti hiba $< 11 \cdot 5 \cdot 10^{-7} = 0{,}0000055$
teljes hiba $< 0{,}0000155$;

π közelítő értékének teljes hibája $< 4 \cdot 0{,}0000155 = 0{,}000062$. Valójában még az ötödik tizedes jegy is helyes.

23.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{30}\left\{1 + 4\cdot\left(\frac{1}{1{,}1}+\frac{1}{1{,}3}+\ldots+\frac{1}{1{,}9}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}4}+\ldots+\frac{1}{1{,}8}\right)+\frac{1}{2}\right\} \approx 0{,}693150.$$

Hibabecslés: képlethiba $< 5 \cdot 10^{-6}$
műveleti hiba $< 11 \cdot 5 \cdot 10^{-7} = 0{,}0000055$
teljes hiba $< 0{,}0000105 \approx 10^{-5}$.

Valójában még az ötödik tizedes jegy is helyes.

24. A fegyverzetek sugarai

$$\frac{0{,}01}{5{,}27} \approx 0{,}2\% \quad \text{és} \quad \frac{0{,}002}{5{,}012} \approx 0{,}04\%$$

relatív hibakorláttal vannak megmérve.

$$R - r = (0{,}258 \pm 0{,}012)\ \text{cm}.$$

A különbség relatív hibája

$$\frac{0{,}012}{0{,}258} \approx 5\% .$$

Ez a módszer a kondenzátor kapacitásának kiszámítására igen pontatlan.

25. Az adatok relatív hibakorlátja 0,008 és 0,006.

a) $R = R_1 + R_2 = 43{,}3 \pm 0{,}3\,\Omega$.

Az eredő ellenállás relatív hibakorlátja 7‰.

b) $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 10{,}5\,\Omega$.

A számláló relatív hibájának korlátja 0,014.
A nevező relatív hibájának korlátja 0,007.
Az eredő hibájának korlátja $10{,}5 \cdot 0{,}021 \approx 0{,}22\,\Omega$.

Az eredő ellenállás relatív hibájának korlátja 21‰.

26. A higanycsepp súlya $(6{,}84 \pm 0{,}1)$ mg.

A relatív hibakorlát az egyes méréseknél $\approx 0{,}01$‰.

A relatív hibakorlát az eredményben $\dfrac{0{,}1}{6{,}84} \approx 15$‰, az egyes mérések relatív hibáinak ezerötszázszorosa.

27. $\lambda = 0{,}579 : 1{,}32^2 = 0{,}33$ mm.

28. Négyjegyű szögfüggvénytáblázattal:

i	$\cos\alpha_i$	X_i (kg)	$\sin\alpha_i$	Y_i (kg)
1	0,7396	370	0,6730	337
2	− 0,8821	− 300	0,4710	160
3	− 0,8443	− 489	− 0,5358	− 310
4	0,5373	225	− 0,8434	− 354
		− 194 kg		− 167 kg

Az eredő irányszögét meghatározza

$\operatorname{tg}\alpha = 167/194$, (harmadik negyed, mert mindkét koordináta negatív),

$$\alpha = 180° + 40{,}7° = 220{,}7°.$$

Az eredő nagysága:

$$R = \sqrt{194^2 + 167^2} = 194 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{167}{194}\right)^2} .$$

A gyökjel alatt a tört 4 tizedesre számítandó, a gyökvonás 3 tizedesre, a szorzás 194-gyel egyes pontossággal.

Eredmény: $R = 256$ kg.

Logarléc (25 cm-es) vagy négyjegyű logartáblázat birtokában az eredmény azonos pontossággal nyerhető.

29.

l	$v = x - l$	$100 \cdot v^2$
52,1	+ 0,1333	1,78
52,5	− 0,2667	7,11
52,1	+ 0,1333	1,78
52,2	+ 0,0333	0,11
52,2	+ 0,0333	0,11
52,3	− 0,0667	0,44
313,4	+ 0,333	11,33
$x = 313{,}4/6 = 52{,}2333$	− 0,333 0,000	$m = \sqrt{\frac{0{,}1133}{5}} \approx 0{,}15$
		$m_x = \frac{0{,}15}{\sqrt{6}} \approx 0{,}06$

$$x = 52{,}23 \pm 0{,}06.$$

2. §. A POLINOM

a) és b)

1. 6.
2. — 1.
3. — 250.
4. 1,125.
5. 3,659375.
6. — 9,35109.
7. 0,0744.
8. $p' = 10, \quad p'' = 26, \quad p''' = 36, \quad p^{(4)} = 24.$
9. $p' = -468, \; p'' = -317, \; p''' = -480, \; p^{(4)} = 0, \; p^{(5)} = 240.$
10. $p' = -21{,}25, \; p'' = -25, \; p''' = 30.$
11. $p' = -2{,}26875, \; p'' = -3{,}95, \; p''' = -3{,}9, \; p^{(4)} = 90, \; p^{(5)} = 444.$
12. $p' = 2{,}2812, \; p'' = -6{,}812, \; p''' = -7{,}92, \; p^{(4)} = 26{,}4.$
13. $p' = 12{,}736, \; p'' = 38{,}4, \; p''' = 78{,}6, \; p^{(4)} = 84.$
14. Az $x - 3 = y$ változó szerint átrendezett polinom

$$y^4 + 6\,y^3 + 13\,y^2 + 10\,y - 1$$

értéke az $y = 0{,}5$ helyen 8,0625.

15. Az $x - 2 = y$ változó szerint átrendezett polinom

$$2\,y^5 - 80\,y^3 - 317\,y^2 - 468\,y - 250$$

értéke az $y = -0{,}1$ helyen — 206,2900.

16. 0,8682.
17. 3,6132.
18. — 9,3398.
19. 0,3099.
20. $c = -\dfrac{a_1}{na_0}$.
21. 0,926.
22. 1,184.
23. — 0,301.
24. 0,905.
25. 1,172.
26. 3,424.
27. — 0,754.
28. 1,824.

29. *Descartes* jelszabályából következik, hogy az egyenletnek egy negatív gyöke van. Próbálgatással eldöntjük, hogy ez a gyök a [—4; —3] számközben van. Értéke 4 tizedesre pontosan — 3,5042.

Az egyenletnek pozitív gyöke vagy nincs, vagy kettő van. A derivált polinomok vizsgálatával megállapítjuk, hogy a [0; ∞] számtartományban az egyenlet bal oldalán álló polinomnak a $\sqrt{8:3}$ helyen minimuma van, és ez pozitív. Tehát pozitív gyök nincs.

30. Az egyenletnek egy pozitív gyöke van (*Descartes* jelszabálya). Ez a gyök a [3; 4] számközben van (próbálgatás a *Horner*-elrendezéssel). Értéke négy tizedesre pontosan 3,0489.

Negatív gyök vagy nincs, vagy kettő van (*Descartes* jelszabálya). A derivált polinomok vizsgálatával megállapítjuk, hogy az egyenlet bal oldalán álló polinomnak a [— ∞; 0] számtartományban a $-\sqrt{7:3} \approx -1{,}5$ helyen maximuma van, amely pozitív. Tehát két negatív gyök van: egyik a [—2; —1,5] számközben, a másik a [—1,5; —1] számközben. Értékük négy tizedesre pontosan — 1,6920 és — 1,3569.

31. Az egyenletnek két valós gyöke van: egyik negatív a [—3; —2] számközben, a másik pozitív a [0; 1] számközben. A másik két gyök nem valós.

$$x_1 \approx -2{,}2340, \quad x_2 \approx 0{,}3276.$$

32. A két valós gyök:

$$x_1 \approx 1{,}2963, \quad x_2 \approx -1{,}4305.$$

33. Az egyenletnek egy vagy három pozitív gyöke van. A derivált polinomok vizsgálatával és a *Horner*-elrendezés felhasználásával kiszámítjuk, hogy az egyenlet bal oldalán álló polinomnak, mely a zérus helyen negatív és a változó „nagy" értékeire pozitív, a 2,5 hely közelében pozitív maximuma van, és a 8 hely közelében negatív minimuma van. (Készítsünk vázlatot.) Tehát az egyenletnek három pozitív gyöke van, amelyek a [0; 1], [5; 6] és [9; 10] számközökben fekszenek:

$$x_1 \approx 0{,}2217, \quad x_2 \approx 5{,}5790, \quad x_3 \approx 9{,}6993.$$

34. 5,94883. 35. 1,16602. 36. 0,66908.

37. — 2,33006, 0,20164, 2,12843. 38. — 0,88677.

39. A derivált polinom

$$4x^3 + 4x - 6$$

egyetlen valós zérushelye $c \approx 0{,}8612$. A polinom a [— ∞; c] számközben monoton fogy, a [c; ∞] számközben monoton nő.

40. A közbenső számításokat 2 tizedes pontossággal végezzük:[2]

[2] Az együtthatók rohamosan nőnek. Ezért első értékes jegyük után tizedes vesszőt teszünk, és felső mutatóval megjelöljük helyértéküket, pl. $9{,}61^{(2)} = 961$.

2	− 31	115	− 24	x
4	$-9{,}61^{(2)}$ $4{,}60$	$1{,}32^{(4)}$ $-0{,}15$	$-5{,}76^{(2)}$	
4 $1{,}6^{(1)}$	$-5{,}01^{(2)}$ $-2{,}51^{(5)}$ $0{,}94$	$1{,}17^{(4)}$ $1{,}37^{(8)}$	$-5{,}76^{(2)}$ $-3{,}32^{(5)}$	x^2
$1{,}6^{(1)}$ $2{,}56^{(2)}$	$-1{,}57^{(5)}$ $-2{,}46^{(10)}$ $0{,}44$	$1{,}37^{(8)}$ $1{,}88^{(16)}$	$-3{,}32^{(5)}$ $-1{,}10^{(11)}$	x^4
$2{,}56^{(2)}$ $6{,}55^{(4)}$	$-2{,}02^{(10)}$ $-4{,}08^{(20)}$ $0{,}10$	$1{,}88^{(16)}$ $3{,}53^{(32)}$	$-1{,}10^{(11)}$ $-1{,}21^{(22)}$	x^8
$6{,}55^{(4)}$ $4{,}29^{(9)}$	$-3{,}98^{(20)}$ $-1{,}58^{(40)}$	$3{,}53^{(32)}$ $1{,}25^{(65)}$	$-1{,}21^{(22)}$ $-1{,}46^{(44)}$	x^{16}
$4{,}29^{(9)}$	$-1{,}58^{(40)}$	$1{,}25^{(65)}$	$-1{,}46^{(44)}$	x^{32}

A kettős szorzatok a második tizedesre már nem gyakoroltak befolyást. A lépéseket nem ismételjük.

Az eredeti egyenlet gyökeinek abszolút értéke:

$$\sqrt[16]{\frac{3{,}98}{6{,}55}\cdot 10^{16}} \approx 9{,}6935; \quad \sqrt[16]{\frac{3{,}53}{3{,}98}\cdot 10^{12}} \approx 5{,}5814; \quad \sqrt[16]{\frac{1{,}21}{3{,}53}\cdot 10^{-10}} \approx 0{,}2218.$$

Behelyettesítéssel (*Horner*-elrendezéssel) eldöntjük az előjelet. Valamennyi gyök pozitív. A gyökök közelítő értékeit valamely más módszerrel javítjuk.

41. A közbenső számításokat 2 tizedesre pontosan végezzük:

1	0	− 8	15	x
1	0 − 16	64 0	− 225	
1 1	− 16 − 256 128	64 4096 − 7200	− 225 − 50 625	x^2
1	− 128	− 3104	− 50 625	x^4

Észrevesszük, hogy az egyenletnek komplex gyökei is vannak, mert a gyökök negyedik hatványai olyan egyenletnek tesznek eleget, amelyben jelkövetkezések lépnek fel.

Folytatjuk az egyenletek sorozatának képzését a legnagyobb abszolút értékű gyök meghatározására:

1	$-1{,}28^{(2)}$	$-3{,}10^{(3)}$	$-5{,}06^{(4)}$	x^4
1	$-1{,}64^{(4)}$ $-0{,}62$	$9{,}61^{(6)}$ $-12{,}95$	$-2{,}56^{(9)}$	
1 1	$-2{,}26^{(4)}$ $-5{,}11^{(8)}$ $-0{,}07$	$-3{,}34^{(6)}$ $1{,}12^{(13)}$ $-11{,}57$	$-2{,}56^{(9)}$ $-6{,}55^{(16)}$	x^8
1	$-5{,}18^{(8)}$	$-10{,}45^{(13)}$	$-6{,}55^{(16)}$	x^{16}

Könnyen becsülhető, hogy a kettős szorzatok a következő lépésben már nem gyakorolnak befolyást a második tizedesekre. A legnagyobb abszolút értékű gyök

$$|x| \approx \sqrt[16]{5{,}18 \cdot 10^8} \approx 3{,}505.$$

Behelyettesítéssel meghatározzuk az előjelet: a gyök negatív.

42.

1	-5	-8	40	-27	x
1	$-2{,}5^{(1)}$ $-1{,}6$	$6{,}4^{(1)}$ 40 $-5{,}4$	$-1{,}6^{(3)}$ $0{,}432$	$7{,}29^{(2)}$	
1	$-4{,}1^{(1)}$	$4{,}1^{(2)}$	$-1{,}168^{(3)}$	$7{,}29^{(2)}$	x^2
1	$-1{,}681^{(3)}$ $0{,}82$	$1{,}681^{(5)}$ $-0{,}958$ $0{,}015$	$-1{,}364^{(6)}$ $0{,}598$	$5{,}314^{(5)}$	
1	$-0{,}861^{(3)}$	$0{,}738^{(5)}$	$-0{,}766^{(6)}$	$5{,}314^{(5)}$	x^4
1	$-0{,}741^{(6)}$ $0{,}148$	$0{,}545^{(10)}$ $-0{,}132$	$-0{,}587^{(12)}$ $0{,}078$	$2{,}824^{(11)}$	
1	$-0{,}593^{(6)}$	$0{,}413^{(10)}$	$-0{,}509^{(12)}$	$2{,}824^{(11)}$	x^8
1	$-0{,}352^{(12)}$ $0{,}008$	$0{,}171^{(20)}$ $-0{,}006$	$-0{,}259^{(24)}$ $0{,}002$	$7{,}957^{(22)}$	
1	$-0{,}344^{(12)}$	$0{,}165^{(24)}$	$-0{,}257^{(24)}$	$7{,}957^{(22)}$	x^{16}

A következő lépésben a kétszeres szorzatok a harmadik tizedest már nem befolyásolják. A gyökök abszolút értékei

$$\sqrt[16]{0{,}344\cdot 10^{12}}\,;\qquad \sqrt[16]{\frac{0{,}165}{0{,}344}\cdot 10^{8}}\,;\qquad \sqrt[16]{\frac{0{,}257}{0{,}165}\cdot 10^{4}}\,;\qquad \sqrt[16]{\frac{7{,}957}{25{,}7}}\,.$$

Behelyettesítéssel eldöntjük, hogy csak a második gyök negatív. A gyökök

$$x_1 \approx 5{,}261;\quad x_2 \approx -3{,}020;\quad x_3 \approx 1{,}828;\quad x_4 \approx 0{,}929.$$

1	0	— 3	4	— 1	x
1	0 — 6	9 0 — 2	— 16 6	1	
1	— 6	7	— 10	1	x^2
1	— 36 14	49 — 120 2	— 100 14	1	
1	— 22	— 69	— 86	1	x^4

Jelkövetkezés lépett fel a második és a harmadik együttható után. Az egyenletnek két konjugált komplex gyöke van. A legnagyobb és a legkisebb abszolút értékű gyökök valós számok. Ezek meghatározására folytatjuk a lépéseket.

1	— 22	— 69	— 86	1	x^4
1	— 4,84(2) — 1,38	4,761(3) — 3,784 0,002	— 7,396(3) — 0,138	1	
1	— 6,22(2)	0,979(3)	— 7,534(3)	1	x^8
1	— 3,869(5) 0,020	0,958(6) — 9,372	— 5,676(7)	1	
1	— 3,849(5)	— 8,414(6)	— 5,676(7)	1	x^{16}

A következő lépések már nem befolyásolják a második és az utolsó előtti együtthatóban a harmadik tizedes jegyet. A lépéseket nem ismételjük. Az első — legnagyobb abszolút értékű — és a negyedik — legkisebb abszolút értékű — gyök:

$$\sqrt[16]{3{,}849 \cdot 10^5} \approx -2{,}234; \qquad \sqrt[16]{\frac{1}{5{,}676 \cdot 10^7}} \approx 0{,}3276.$$

A helyes előjeleket behelyettesítéssel határoztuk meg.

44.

1	0	0	−1	x
1	0	0	−1	
	0	0		
1	0	0	−1	x^2

Már az első lépésből kiderül, hogy a módszer nem alkalmazható: mindig ugyanaz az egyenlet tér vissza. A legnagyobb abszolút értékű gyök tehát zérus volna, holott a zérus nem gyöke az egyenletnek. Az egyenlet gyökei:

$$1, \qquad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

A három gyök abszolút értéke ugyanaz.

45. A gyökök közelítő értékei:

13,22; —8,40; —3,38; 1,57.

46. 4,07; —2,99; 1,96; —1,03; 0,0445.

47. A polinom az $x^2 = y$ helyettesítéssel a

$$32y^3 - 48y^2 + 18y - 1 = 0$$

harmadfokú egyenletre vezet, amelynek minden gyöke pozitív. Gyökeiből az eredeti polinom zérushelyeit az $x = \pm\sqrt{y}$ kapcsolatból számítjuk ki.

Előkészítő lépésként helyettesítsünk y helyébe $0{,}1z$-t.

$$32\,z^3 - 480\,z^2 + 1800\,z - 1000 = 0.$$

A gyökök közelítő értékei

$z_1 \approx 9{,}329,$ $\quad y_1 \approx 0{,}933,$ $\quad y_{1,2} \approx \pm 0{,}965,$

$z_2 = 5,$ $\quad y_2 = 0{,}5$ $\quad x_{3,4} \approx \pm 0{,}707,$

$z_3 \approx 0{,}666,$ $\quad y_3 \approx 0{,}067,$ $\quad x_{5,6} \approx \pm 0{,}259.$

48 A megoldás menete ugyanaz, mint az előző feladaté.

$x_{1,2} \approx \pm 0{,}866,$ $\quad x_{3,4} \approx \pm 0{,}424,$ $\quad x_{6,5} \approx \pm 0{,}266.$

49. $x_1 \approx 9{,}395$, $x_2 \approx 4{,}537$, $x_3 \approx 1{,}745$,
$x_4 \approx 0{,}323$.

50. $x_{1,2} \approx \pm 3{,}324$, $x_{3,4} \approx \pm 1{,}890$, $x_{5,6} \approx \pm 0{,}616$.

51. Az egyenletet rendezzük

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 - 7\lambda + 55 = 0.$$

A gyökök közelítő értékei:

6,85 2,91 —2,76

52. 5,10; 1,66.

53. —46,4; —2,22.

54. 20,1; —1,72.

55. 3,27; —2,17.

56. Az $x = \frac{y}{10}$ helyettesítés után az

$$y^2 - 8y + 11 = 0$$

egyenletet kapjuk.

$y_1 \approx 6{,}22$, $x_1 \approx 0{,}622$;
$y_2 \approx 1{,}78$ $x_2 \approx 0{,}178$.

57. A megoldást az $x = \frac{y}{10}$ helyettesítéssel kapjuk:

$x_1 \approx -2{,}17$,
$x_2 \approx -0{,}33$.

58. Alkalmazzuk az $x = \frac{y}{2}$ helyettesítést.

$x_1 \approx 15{,}64$,
$x_2 \approx -0{,}64$.

59. Alkalmazzuk az $x^2 = \frac{y}{16}$ helyettesítést.

$x_1 \approx 0{,}862$, $x_3 \approx 0{,}336$,
$x_2 \approx -0{,}862$, $x_4 \approx -0{,}336$.

c)

1. Logarléccel:

3,1	4,2	—3,5	(1,2 : 3,1)
1,2	—3,5	2,2	
	—1,63	1,36	
	—5,13	3,56	$y \approx 0{,}692$;
		—3,5	
		2,91	
		—0,59	$x \approx 0{,}190$.

2.	$x \approx 0{,}0388$;	$y \approx 0{,}8695$.	
3.	$x \approx -0{,}4290$;	$y \approx 0{,}2348$.	
4.	$x \approx -0{,}0407$;	$y \approx 0{,}627$.	
5.	$x \approx 0{,}034$;	$y \approx -0{,}273$.	
6.	$x \approx 0{,}944$;	$y \approx 1{,}227$;	$z \approx 0{,}654$.
7.	$x \approx 1{,}92735$;	$y \approx -2{,}01985$;	$z \approx 0{,}75842$.
8.	$x \approx 0{,}35950$;	$y \approx 0{,}444855$;	
	$z \approx 0{,}71215$;	$u \approx -1{,}12208$.	

9. Az egyenletrendszer determinánsa közelítőleg -16. Az x értékének öröklött hibakorlátja

$$\frac{(4{,}2+3{,}5)\,(0{,}69+0{,}19+1)}{16}\cdot 0{,}005 < 0{,}005.$$

Ugyanez a hibakorlátja y értékének.

10. Az egyenletrendszer közelítő megoldása:

$$x \approx 1{,}045; \qquad y \approx -2{,}045.$$

Determinánsa közelítőleg $-13{,}4$.
x öröklött hibájának korlátja

$$\frac{(4{,}92+0{,}93)\,(1{,}045+2{,}045+1)}{13}\cdot 0{,}01 < 0{,}02.$$

Ugyanez a hibakorlátja y értékének.

11.	$x \approx 1{,}515$;	$y \approx 1{,}168$;	$z \approx 1{,}405$.	
12.	$x \approx 1{,}9094$;	$y \approx 3{,}1944$;	$z \approx 5{,}0446$.	
13.	$x \approx -2{,}83$;	$y \approx -1{,}38$;	$z \approx 3{,}84$.	
14.	$x \approx 1{,}34$;	$y \approx -4{,}76$;	$z \approx 2{,}58$.	
15.	$x_1 = 2{,}34$;	$x_2 = 4{,}51$;	$x_3 = -6{,}00$;	$x_4 = -1{,}30$.
16.	$x_1 \approx 2{,}06$;	$x_2 \approx 3{,}22$;	$x_3 \approx 4{,}03$;	$x_4 \approx -2{,}01$;
	$x_5 \approx 3{,}00$.			
17.	$x_1 = 1{,}20$;	$x_2 = -2{,}00$;	$x_3 = 4{,}23$;	$x_4 = 2{,}00$;
	$x_5 = -3{,}10$.			

18. Az

$$y = mx + b$$

lineáris kapcsolat „legvalószínűbb" együtthatóit az a követelmény határozza meg, hogy az „eltérések" négyzetösszege

$$\Sigma\,(mx_i + b - y_i)^2$$

minimum legyen. Ez a követelmény akkor teljesül, ha m és b az

$$m\,\Sigma x_i^2 + b\,\Sigma x_i - \Sigma x_i y_i = 0$$
$$m\,\Sigma x_i^2 + bn - \Sigma y_i = 0$$

egyenletrendszert kielégítik.

$$\Sigma x_i = 13{,}5 \qquad \Sigma x_i^2 = 34{,}75$$
$$\Sigma y_i = 54{,}6 \qquad \Sigma x_i y_i = 157{,}15.$$

Az egyenletrendszer tehát

$$34{,}75\,m + 13{,}5\,b - 157{,}15 = 0$$
$$13{,}5\,m + 6\,b - 54{,}6 = 0.$$

Az első egyenlet bal oldalából kivonva a második egyenlet bal oldalának 2,2-szeresét, o yan egyenletet kapunk, amelyben b együtthatója sokkal kisebb m-énél.

$$5{,}05\,m + 0{,}3\,b - 37{,}03 = 0$$
$$13{,}5\,m + 6\,b - 54{,}6 = 0.$$

Hogy a második egyenletben b együtthatója legyen sokkal nagyobb m-énél, bevezetjük az új ismeretlent

$$b = B - 2{,}2\,m.$$

Az új egyenletrendszer:

$$4{,}39\,m + 0{,}3\,B - 37{,}03 = 0$$
$$0{,}3\,m + 6\,B - 54{,}6 = 0.$$

A megoldás sémája:

— 37,2	— 54,6	8	9
35,12 2,7	2,4 54		
0,52 — 0,439 — 0,09	1,8 — 0,03 — 1,8	— 0,1	— 0,3
— 0,009 + 0,00878 + 0,0015	— 0,03 + 0,0006 + 0,003	+ 0,003	+ 0,005
+ 0,00128	+ 0,0006	— 0,0003 7,9017	— 0,0001 8,7049

$$m \approx 7{,}9017,$$
$$b \approx B - 2{,}2 \cdot m \approx -98{,}6788.$$

A legvalószínűbb együtthatókkal a kapcsolat

$$y \approx 7{,}9017\,x - 8{,}6788.$$

19. Áttérve a 10 alapú logaritmusokra

$$\lg y = B \lg e \cdot x + \lg A$$
$$Y = mx + b.$$

A kapcsolat $\lg y = Y$ és x között lineáris a következő konstans együtthatókkal

$$B \lg e \approx 0{,}4343 \cdot B = m$$
$$\lg A = b.$$

Írjuk fel $\lg y = Y$ táblázatát

x	$\lg y = Y$
1	1,12320
1,5	1,17725
2	1,24378
2,5	1,29667

x	$\lg y = Y$
3	1,36380
3,5	1,41497
4	1,48430
4,5	1,53656

$$\Sigma x = 22 \qquad \Sigma x^2 = 71$$
$$\Sigma Y = 10{,}64053 \qquad \Sigma xY = 30{,}51383.$$

A konstansok legvalószínűbb értékének meghatározására (lásd előbbi feladatot) a következő egyenletrendszer szolgál:

$$71\,m + 22\,b - 30{,}51383 = 0$$
$$22\,m + 8\,b - 10{,}64053 = 0.$$

A második egyenlet bal oldalának 3,2-szereséből levonva az első bal oldalát

$$71\,m + 22\,b - 30{,}51383 = 0$$
$$-0{,}6\,m + 3{,}6\,b - 3{,}53587 = 0.$$

Végül helyettesítve: $m = M - 0{,}3b$

$$71\,M + 0{,}7\,b - 30{,}51383 = 0$$
$$-0{,}6\,M + 3{,}78\,b - 3{,}53587 = 0.$$

Megoldás:

$$M \approx 0{,}420; \qquad m \approx 0{,}119.$$
$$b \approx 1{,}002;$$

Vagyis

$$A \approx 10{,}05;$$
$$B \approx 0{,}274.$$

A kapcsolat

$$y \approx 10{,}05e^{0{,}274 \cdot x}.$$

20. Első közelítés:

$$x_1 = 0{,}4211;\quad y_1 = -0{,}1379;\quad z_1 = -0{,}1053;\quad t_1 = 0{,}0769;\quad u_1 = 0{,}3333.$$

Megoldás 3 tizedesre pontosan:

$$x \approx 0{,}368;\quad z \approx -0{,}108;\quad y \approx -0{,}054;\quad t \approx -0{,}146;\quad u \approx -0{,}262.$$

21. A *Clapeyron*-egyenletek szerint

$$\begin{aligned}
18\,M_1 + 5\,M_2 &= -47\,250\\
5\,M_1 + 22\,M_2 + 6\,M_3 &= -85\,250\\
6\,M_2 + 22\,M_3 + 5\,M_4 &= -85\,250\\
5\,M_3 + 22\,M_4 + 6\,M_5 &= -85\,250\\
6\,M_4 + 22\,M_5 + 4\,M_6 &= -70\,000\\
8\,M_5 + 16\,M_6 &= -32\,000
\end{aligned}$$

$M_1 \approx -1856$ kgm, $M_2 \approx -2765$ kgm, $M_3 \approx -2532$ kgm,
$M_4 \approx -2595$ kgm, $M_5 \approx -2579$ kgm, $M_6 \approx -\ 710$ kgm.

22. Az első és utolsó (0 és 5 indexű) támaszpontokban a támasznyomatékok értéke zérus. A másik négy támasznyomaték a *Clapeyron*-egyenletekből számítható ki:

$$\begin{aligned}
14\,M_1 + 4\,M_2 &= -\ 8\,337{,}5\\
4\,M_1 + 18\,M_2 + 5\,M_3 &= -23\,625\\
5\,M_2 + 16\,M_3 + 3\,M_4 &= -15\,962{,}5\\
3\,M_3 + 14\,M_4 &= -\ 1\,137{,}5.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer közelítő megoldása

$M_1 \approx -293{,}0$ kgm; $M_2 \approx -1058{,}8$ kgm; $M_3 \approx -678{,}8$ kgm;
$M_4 \approx 64{,}2$ kgm.

23. A rudak hossza és a kötél hossza:

$$AS = 11 \text{ m},\quad BS = 9 \text{ m},\quad CS = 7 \text{ m},\quad ST = \sqrt{77} \text{ m}.$$

Jelöljük a rudakban ébredő erőket

$$z_1,\ z_2,\ z_3$$

indexes betűkkel.

Az egyensúly feltételeit a koordináta-tengelyek irányára írjuk fel:

$$\frac{9}{11}z_1 - \frac{3}{9}z_2 - \frac{3}{7}z_3 + \frac{4}{\sqrt{77}} = 0$$

$$-\frac{2}{11}z_1 + \frac{6}{9}z_2 - \frac{2}{7}z_3 + \frac{5}{\sqrt{77}} = 0$$

$$\frac{6}{11}z_1 + \frac{6}{9}z_2 + \frac{6}{7}z_3 + \frac{6}{\sqrt{77}} = 0.$$

Az egyenletrendszert a következővel helyettesítjük (az együtthatók hibakorlátja az utolsó kiírt jegy helyértékének fele):

$$818\, z_1 - 333\, z_2 - 429\, z_3 + 456 = 0$$
$$182\, z_1 + 667\, z_2 - 286\, z_3 + 570 = 0$$
$$545\, z_1 + 667\, z_2 + 857\, z_3 + 684 = 0.$$

A megoldás

$$z_1 \approx -0{,}731 \text{ t (nyomás)}$$
$$z_2 \approx -0{,}896 \text{ t (nyomás)}$$
$$z_3 \approx +0{,}365 \text{ t (húzás)}.$$

A közelítő értékek relatív hibakorlátja rendre

közelítőleg $5{,}6^0/_{00}$, $5{,}0^0/_{00}$, $25{,}0^0/_{00}$.

3. §. DIFFERENCIASZÁMÍTÁS

Az 1—33. feladat megoldását a szövegben találjuk.

34. Az *a)* rovat másodrendű differenciái kisebbek, mint az *a)* rovatban kiírt utolsó számjegy helyértékének 8-szorosa. Lineárisan interpolálunk:

$$y(362{,}6) \approx (1 + \Delta)^{0{,}6} y \approx \sqrt{362} + 0{,}6 \cdot \Delta \sqrt{362} \approx 19{,}03 + 0{,}012 \approx 19{,}04.$$

A másodrendű differenciák kisebbek, mint a *b)* rovatban kiírt utolsó jegy helyértékének 8-szorosa. Lineárisan interpolálunk:

$$y(362{,}6) \approx (1 + \Delta)^{0{,}6} y \approx \sqrt{362} + 0{,}6 \cdot \Delta \sqrt{362}$$

$$\approx 19{,}0263 + 0{,}6 \cdot 0{,}0263 \approx 19{,}0421$$

(Az eredmény $5 \cdot 10^{-6}$ pontossággal 19,04206).

35. Kvadratikusan interpolálunk:

a) retrográd differenciákkal $y(175) \approx 5{,}5935$.

b) *Gauss* képletével:

$$y(175) \approx \sqrt[3]{170} + 0{,}5 \cdot \Delta \sqrt[3]{170} + \binom{0{,}5}{2} \Delta^2 \sqrt[3]{160} \approx$$

$$\approx 5{,}5397 + 0{,}5 \cdot 0{,}1065 + 0{,}125 \cdot 0{,}0044 \approx$$

$$\approx 5{,}5935.$$

($a = 170$; $d = 10$; $t = 0{,}5$)

c) *Bessel* képletével:

$$y(175) \approx \frac{5{,}5397 + 5{,}6462}{2} + 0 \cdot \Delta \sqrt[3]{170} + 0{,}125 \frac{0{,}0038 + 0{,}0036}{2} \approx 5{,}5934.$$

Az eredmények nem egyeznek. A kvadratikus interpolálás valóban nem kielégítő.

Harmadfokúan interpolálva pl. haladó differenciákkal:

$$\sqrt[3]{175} \approx \sqrt[3]{170} + 0{,}5 \cdot \Delta \sqrt[3]{170} + \binom{0{,}5}{2} \Delta^2 \sqrt[3]{170} + \binom{0{,}5}{3} \Delta^3 \sqrt[3]{170} \approx$$

$$\approx 5{,}5397 + 0{,}05325 + 0{,}000475 + 0{,}0000125 = 5{,}5934375 \approx 5{,}5934.$$

Az eredmény helyes.

36. $y_{0,17} \approx (1+\Delta)^{0,7} y_{0,1} \approx y_{0,1} + 0,7 \cdot \Delta y_{0,1} + \binom{0,7}{2} \Delta^2 y_{0,1} +$

$$+ \binom{0,7}{3} \Delta^3 y_{0,1} + \binom{0,7}{4} \Delta^4 y_{0,1} \approx 1,18530.$$

$$y_{0,47} \approx (1-R)^{0,3} y_{0,5} \approx 1,59999.$$

37. Az osztott differenciák táblázata:

0	1,00000					
0,5	1,64872	1,29744				
1	2,71828	1,71828	0,84168			
2	7,38906	3,19453	1,26473	0,42305		
3	20,0855	6,36183	2,02576	0,59204	0,16899	
4	54,5982	13,39955	3,45775	0,87202	0,22449	0,05550

$$y = 1 + 1,29744\,x + 0,84168\,x(x-0,5) + 0,42305\,x(x-0,5)(x-1) +$$
$$+ 0,16899\,x(x-0,5)(x-1)(x-2)$$

$y(1,5) = 4,46260.$

A negyedfokú *Newton* polinommal való interpolálás hibája

$$\frac{e^t}{5!}\,x(x-0,5)(x-1)(x-2)(x-3),$$

ahol t valamely szám a $[0;\,3]$ számközben. A hiba tehát kisebb mint

$$\frac{e^3}{120}\,0,5625 < 0,1.$$

A helyes érték 4,48169 valójában sokkal kevesebbel különbözik az interpolált értéktől.

38. $y \approx 0,3010(x-1) - 0,0625(x-1)(x-2) + 0,0124(x-1)(x-2)(x-3) -$
$- 0,0022(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 0,0004(x-1)\ldots(x-5)$

$\log 3,25 \approx 0,5117.$ (Helyesen: 0,5119.)

39. Utasítás: Kiegészítjük a táblázatot a differenciák rovatával egészen az ötödik rendig. Azután az

$$y_{1,2+t\cdot 0,01} = (1+\Delta)^t y_{1,2} = 1 + \binom{t}{1}\Delta y_{1,2} + \binom{t}{2}\Delta^2 y_{1,2} +$$
$$+ \binom{t}{3}\Delta^3 y_{1,2} + \binom{t}{4}\Delta^4 y_{1,2} + \binom{t}{5}\Delta^5 y_{1,2}$$

képletet alkalmazzuk.

A megoldás:

x	1,21	1,22	1,23	1,24
$g(x)$	0,9616947	0,9605212	0,9594016	0,9583351
x	1,25	1,26	1,27	1,28
$g(x)$	0,9573212	0,9563593	0,9554488	0,9545892
x	1,29			
$g(x)$	0,9537798.			

40. $h_{26^\circ} \approx 0{,}4499$ m $\quad m_{26^\circ} \approx 0{,}0256$ m $\quad t_{26^\circ} \approx 0{,}0077$ m².

41. $I\,(a + td) = I\,(1{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}5) \approx$

$$\approx I\,(1{,}5) + 0{,}6\,\frac{\Delta I(1{,}5) + \Delta I(1)}{2} + \frac{0{,}36}{2}\,\Delta^2\,I(1) +$$

$$+ \frac{0{,}6\,(0{,}36 - 1)}{6} \cdot \frac{\Delta^3 I(1) + \Delta^3 I(0{,}5)}{2} \approx$$

$$\approx 0{,}4332 + 0{,}6\,\frac{0{,}0440 + 0{,}0919}{2} + 0{,}18\,(-0{,}0479) -$$

$$- 0{,}064\,\frac{0{,}0205 + 0{,}0100}{2} \approx 0{,}4644.$$

Helyesen: 0,4641.

42. A differenciák táblázata

21°	0,3706344		
		0,0090282	
21,5°	0,3796626		0,0000144
		0,0090426	
22°	0,3887052		0,0000147
		0,0090573	
22,5°	0,3977625		

A *Bessel*-képlet szerint

$$I(21°\,45') = I(a + td) = I\left(21{,}5° + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5°\right) \approx$$

$$\approx \frac{I(a) + I\,(a + d)}{2} + 0 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 I(a) + \Delta^2 I(a - d)}{2}$$

$$\approx \frac{0{,}3796626 + 0{,}3887052}{2} - \frac{0{,}0000147 + 0{,}0000144}{2}$$

$$\approx 0{,}3841837.$$

43. Másodfokú interpolálással *Gauss* képlete szerint

$$p(93) \approx 7{,}40 \text{ g/mm}^2,$$
$$p(123) \approx 21{,}40 \text{ g/mm}^2.$$

44. A (3.26) és (3.27) képletek alkalmazásával

$$p'(100) \approx 0{,}3565; \quad p''(100) \approx 0{,}0104.$$

Ha a harmadiknál magasabbrendű differenciákat elhanyagoljuk, a (3.8) képlettel

$$p'(100) \approx 0{,}3557,$$

a (3.20) képlettel

$$p'(100) \approx 0{,}3517.$$

45. A (3.26) és (3.27) képletekkel

$$y'(0{,}95) = 0{,}58168, \quad y''(0{,}95) = -0{,}8168.$$

A feladatban felírt táblázat a szinuszfüggvény öt tizedesre pontos táblázata. Hasonlítsuk össze y' értékét cos 0,95-tel (az eredmény öt tizedesre pontos) és y'' értékét — sin 0,95 értékével (az eredményben már a harmadik tizedes hibás).

46. A (3.8) képlettel —0,02510,
a (3.20) képlettel —0,02447,
a (3.27) képlettel —0,02569.

47. $$f'(4{,}5) = 15{,}75, \quad f''(4{,}5) = 17{,}00.$$

48. *Gauss* interpoláló képletét alkalmazzuk második fokig:

$$a = 3{,}141; \qquad d = 0{,}001; \qquad t = \frac{x-a}{d} = -1.$$

$$\lg 3{,}140 \approx 0{,}4969296481.$$

49. $$\lg \pi \approx 0{,}4971498727.$$

50. *Gauss* képletét alkalmazzuk:

$$a = 4 \text{ óra}; \quad d = 1 \text{ óra}; \quad x - a = -1485 \text{ mp};$$

$$\frac{x-a}{d} = -\frac{1485}{3600} \approx -0{,}3569.$$

A deklináció közelítő értéke

$$\delta = 7^\circ\, 47'\, 36{,}8''.$$

51. Felírjuk a harmadfokú *Newton*-polinomot a 350 kg-hoz legközelebbi négy mérésből:

y	253,4	351,6	172,4	469,7
x	20	25	15	30

A polinom

$$20 + 0{,}05092\,(x - 253{,}4) - 0{,}00006\,(x - 253{,}4)\,(x - 351{,}6) + \\ + 0{,}00000006\,(x - 253{,}4)\,(x - 351{,}6)\,(x - 172{,}4).$$

A rugó megrövidülése

$$y\,(300\text{ kg}) \approx 22{,}5171456\text{ mm}.$$

52.

A feljegyzés hibája	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0				
	0			
0		0		
	0		ε	
0		ε		-4ε
	ε		-3ε	
ε		-2ε		6ε
	$-\varepsilon$		3ε	
0		ε		-4ε
	0		$-\varepsilon$	
0		0		
	0			
0				

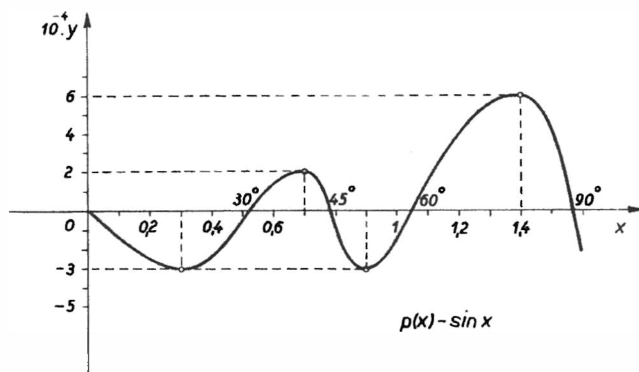
A hiba a magasabb rendű differenciák oszlopaiban egyre terjed és nő. Legnagyobb a hiba sorában vagy a közvetlen szomszédos sorokban.

53. Kiszámítjuk az x éves korban élők számát (l_x)

x	20	25	30	35	40	45
l_x	100 000	95 960	91 848	87 397	82 269	76 361

33 éves korban annyian haltak meg, amennyivel több a 32,5 éves korban élők száma, mint a 33,5 éves korban élőké:

$$\left\{(1+\Delta)^{0,5} - (1+\Delta)^{0,7}\right\} y_{30} = -0{,}2\,\Delta - 0{,}02\,\Delta^2 + 0{,}017\,\Delta^3 \approx 902.$$



62. ábra

54. $p(x) = 0{,}9549\,x - 0{,}2086\,(x - 0{,}5236)\,x -$
$- 0{,}1360\,(x - 0{,}5236)\,(x - 0{,}7854)\,x +$
$+ 0{,}0277\,(x - 0{,}5236)\,(x - 0{,}7854)\,(x - 1{,}0472)\,x.$

x	0,3	0,7	0,9	1,4
$p(x) - \sin x$	−0,0003	0,0002	−0,0003	0,0006

55. $$p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{d}(x - a) + \frac{y_2 - 2\,y_1 + y_2}{2\,d^2}(x - a)(x - a - d).$$

Tehát

$$\int_a^{a+2d} f(x)\,dx \approx \int_a^{a+2d} p(x)\,dx = \frac{d}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2).$$

4. §. EGYENLETEK MEGOLDÁSA

a)

1. *Descartes* jelszabályából következik, hogy az egyenletnek nincs negatív gyöke, és vagy két pozitív gyöke van, vagy egy sincs.

Mivel az $x = 0, 1, 2$ helyeken a $p(x)$ értéke rendre $2, -1, 14$, az egyenletnek egy gyöke van a $[0; 1]$ számközben, és egy az $[1; 2]$ számközben.

2. *Descartes* jelszabályából következik, hogy az egyenletnek egy pozitív gyöke, és egy vagy három negatív gyöke van.

Mivel $p(0) = -1$ és $p(1) = 8$, a pozitív gyök a $[0; 1]$ számközben van.

Abból, hogy $p'(x) = 2x\,[2x^2 + 3x + 6] < 0$, ha $x < 0$, tudjuk, hogy $p(x)$ a $[-\infty; 0]$ számközben monoton fogy, tehát csak egy negatív zérushelye lehet. Ez a $[-1; 0]$ számközben van, mert $p(-1) = 4$, és $p(0) = -1$.

3. Vázlatosan ábrázoljuk a $\sin x$ és a $10 \cdot (x - 1)$ függvényeket. Ezek egyetlen metszéspontja az $[1; 1{,}1]$ számközben fekvő argumentumhoz tartozik.

4. Vázlatosan ábrázoljuk $\cos x$ görbéjét, amelyet az $y = x$ egyenes egyetlen pontban metsz. A metszéspont abszcisszája közelítőleg $0{,}73$ ($\approx 42°$).

5. Az egyenlet két oldalán álló függvények görbéi egymást két pontban metszik, amelyeknek argumentuma 0,6 és 1,5 közelében van.

6. Vázlatos ábrából látható, hogy az egyetlen gyök a $[0{,}5; 0{,}6]$ számközben van.

7. $\ln x$ és $\frac{100}{x}$ görbéi egymást egyetlen pontban metszik. A metszéspont abszcisszája — az egyenlet gyöke — a $[19; 20]$ számközben van.

8. Vázlatos ábrából látható, hogy az egyenlet legkisebb pozitív gyöke $\frac{3\pi}{2}$-től balra, nem messze a $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7$ értéktől fekszik.

9. Vázoljuk $\cos x$ és $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ görbéit. A vázlatból látható, hogy a legkisebb pozitív gyök $\frac{3\pi}{2}$ közelében, tőle valamivel jobbra fekszik.

b)

Megoldható:

1. *a)* a húrmódszerrel;
   b) az érintő módszerrel; kezdő érték $x = 1$;
   c) iterálással

$$x = \frac{3,2}{x^2 + 2,6}$$

egyenletből és $x = 1$ kezdő értékkel;

2. *a)* a húrmódszerrel;
   b) az érintő módszerrel; kezdő érték $x = 1$;
   c) iterálással

$$x = \frac{35 + 10x^2 - x^3}{40}$$

egyenletből és $x = 1$ kezdő értékkel;

3. *a)* a húrmódszerrel;
   b) az érintő módszerrel; kezdő érték $x = -1$;
   c) iterálással

$$x = \frac{-0,8}{2,5x^2 - 3,1x + 1,5}$$

egyenletből és $x = 0$ kezdő értékkel;

4. *a)* a húrmódszerrel;
   b) az érintő módszerrel; kezdő érték $x = 1$;
   c) iterálással

$$x = \sqrt{\frac{5}{x^3 - 3x + 8}}$$

egyenletből és $x = 1$ kezdő értékkel;

5. *a)* a húrmódszerrel;
   b) az érintő módszerrel; kezdő érték $x = 2$;
   c) iterálással

$$x = \frac{12}{x^3 + 5x^2 - 7x + 10}$$

egyenletből és $x = 1$ kezdő értékkel;

6. *a)* a húrmódszerrel;
   b) az érintő módszerrel; kezdő érték $x = 4$;
   c) iterálással

$$x = \sqrt[5]{8x^3 - 12x + 185}$$

egyenletből és $x = 3$ kezdő értékkel;

7. *a)* a húrmódszerrel;

b) az érintő módszerrel; kezdő érték $x = -1$;

c) iterálással

$$x = -\sqrt{1+x}$$

egyenletből és $x = -0{,}7$ kezdő értékkel;

8. *a)* a húrmódszerrel;

b) az érintő módszerrel; kezdő érték $x = 2$;

c) iterálással

$$x = \sqrt{3x^3 + 2}$$

egyenletből és $x = 2$ kezdő értékkel.

9. Az állítás *Descartes* jelszabályával igazolható. A határok behelyettesítésével igazoljuk, hogy a $(-0{,}2;\ 0)$ számköz tartalmazza a gyököt.

$$x \approx -0{,}19994.$$

10. A legkisebb gyök a $(0;\ 1)$ számközben van; közelítő értéke 0,2218.

A másik két gyököt húrmódszerrel vagy érintő módszerrel közelítjük meg. Közelítő értékeik: 5,5789 és 9,6993.

11. Az egyetlen reális gyök a $(0;\ 1)$ számközben van. Alkalmazzuk a módosított érintő módszert. A baloldali polinom deriváltja $3x^2 + 3$, amelynek abszolút értéke a számközben $\leqq 6$.

A monoton növekedő közelítő értékek sorozatának első három eleme: $0,\ \frac{1}{3},\ \frac{40}{81}$

a monoton fogyóé: $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{50}{81}$. A megoldás 3 tizedesre pontosan (63. ábra):

0,595

12. A gyökök a $(-3;\ -2)$, $(0;\ 1)$ és $(2;\ 3)$ számközökben vannak. Határozzuk meg a negatív gyököt a húrmódszerrel, a kisebbik pozitív gyököt iterálással, a harmadikat az érintő módszerrel.

Megoldások öt tizedesre pontosan:

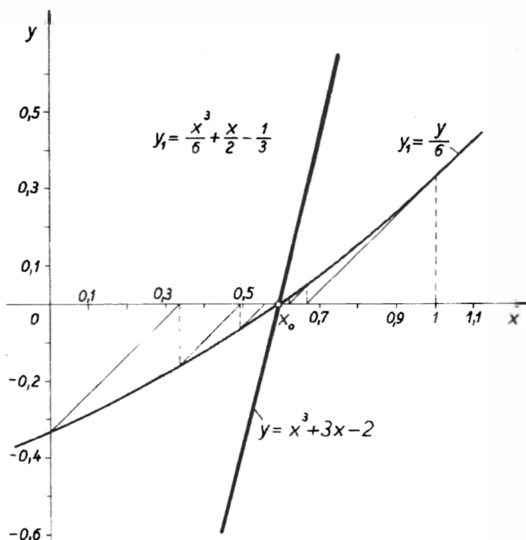
$$x_1 \approx -2{,}33006;$$

$$x_2 \approx 0{,}20164;$$

$$x_3 \approx 2{,}12843.$$

13. Az egyetlen reális gyök a $(2;\ 3)$ számközben van. Közelítő értéke három tizedesre pontosan 2,456.

17. 0,73909.



63. ábra

18. 0,6191. (A másik gyök 1,5121, mely iterálással határozható meg az ekvivalens

$$x = \ln 3 + \ln x \text{ egyenletből.)}$$

19. 1,088.
20. 0,091.
21. 1,745.
22. 0,442.
23. 2,506.
24. 0,567.
25. Az egyenlet két oldalán álló függvények vázlatos ábrázolásával megállapítjuk, hogy az egyenletnek két gyöke van, az egyik a (0,5; 1), a másik a (2; 2,5) számközben.

A nagyobb gyököt a húr- vagy érintő módszerrel, vagy iterálással az ekvivalens

$$x = \sqrt[3]{3 + 10 \ln x}$$

egyenletből (kezdő érték 2,5) számítjuk ki: $\approx$ 2,224. A kisebb gyököt a húr- vagy érintő módszerrel, vagy iterálással az ekvivalens

$$x = e^{0,1\,x^3 - 0,3}$$

egyenletből (kezdő érték 1) számítjuk ki: $\approx$ 0,776.

26. Az egyenletet — a felírt alakban, ha van e alapú logaritmustáblázatunk, vagy az ekvivalens egyenletet

$$x \lg x = 43,429\ldots,$$

ha 10 alapú logaritmustáblázattal rendelkezünk, — pl. érintő módszerrel oldjuk meg Kezdő érték $x = 30$.

Megoldás 5 tizedesre pontosan: 29,53660.

27. A gyök a $(0,75\,\pi;\ \pi)$ számközben van, amit pl. grafikusan állapíthatunk meg Az egyenlettel ekvivalens a

$$2 \lg x = \lg 20 + \lg \sin x.$$

Aszerint, hogy milyen függvénytáblázataink vannak, az egyik vagy a másik egyenletből számítjuk ki a gyököt. Öt tizedes pontossággal

$$x \approx 2,75295.$$

28. Az egyenletnek két reális gyöke van. Az x_1 gyök a $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ számközben a $\frac{\pi}{2}$ közelében van. Mivel az egyenlet bal oldalán páratlan függvény áll, a másik gyök $-x_1$.

$$x_1 = 1,276.$$

29. Az egyenlet egyetlen gyöke $\approx$ 0,765.

30. Készítsünk vázlatos ábrát. A keresett gyök a $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$ számközben $\frac{3\pi}{2}$ közelében van. A megoldást fárasztóvá teszi, hogy a legtöbb szögfüggvénytáblázatban az argumentum csak fokokban van adva. A megoldásra kínálkozó iterálás nem alkalmazható, mert a gyök taszító. A feladatot célszerűen az ekvivalens

$$\sin x - x \cos x = 0$$

alakban érintő módszerrel oldjuk meg. Kezdő érték $\frac{3\pi}{2}$.

$$x \approx 4{,}493409 \approx 257° 27' 12''.$$

31. 4,73004.

32. Készítsünk vázlatot. Jelöljük a háromszög alapját $2x$-szel, szárait a-val. A háromszög területét kétféleképpen számíthatjuk ki:

$$x\sqrt{64 - 16x} = r(a + x) = 8.$$

Ebből

$$x^3 - 4x^2 + 4 = 0.$$

Az egyenlet három gyöke közül a negatív nem oldja meg a feladatot. Az egyik pozitív gyök az (1; 2), a másik a (3; 4) számközben van. A megoldásra mindegyik módszer alkalmas. (Az iterálás az $x = \sqrt[3]{4x^2 - 4}$ alakban.) A megoldások

$$2x_1 \approx 2{,}39 \text{ cm}; \quad 2x_2 \approx 7{,}42 \text{ cm}.$$

33. Jelöljük a háromszög fél kerületét s-sel. A háromszög területe

$$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A jobb oldalon c helyébe $2s - a - b$ írható. Akkor s meghatározására az

$$s^3 + (r^2 + a^2 + ab + b^2)s - ab(a + b) = 0$$

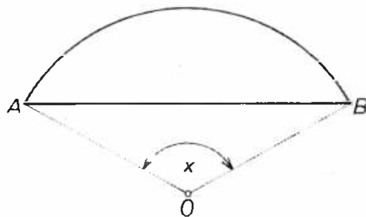
egyenletet kapjuk. A feladat adataival

$$s^3 + 413s - 2760 = 0.$$

A három reális gyök közül csak kettő ad pozitív c értéket:

$$c_1 \approx 9{,}32 \text{ cm}; \quad c_2 \approx 21{,}24 \text{ cm}.$$

34. A körszelet területe az OAB körcikk és az OAB háromszög területének különbsége (64. ábra):



64. ábra

$$\frac{r^2x}{2} - \frac{r^2 \sin x}{2} = \frac{r^2\pi}{5}.$$

Megoldandó az

$$x - \sin x = \frac{2\pi}{5} (= 1{,}25664\ldots)$$

egyenlet. Iterálással $\frac{\pi}{2}$ kezdő értékkel

$$x \approx 2{,}1131 \approx 121{,}07°.$$

35. A feladat megoldása $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ számközben keresendő. Az $x = \frac{\pi}{4}$ kezdő értékkel indulva az érintő módszerrel

$$x \approx 61{,}04°.$$

36. A körcikk területe $\frac{r^2 x}{2}$, a háromszögé $\frac{r^2 \operatorname{tg} x}{2}$. A megoldandó egyenlet

$$2\,x = \operatorname{tg} x.$$

$x \approx 66{,}78°$.

37. Jelöljük a ϱ sugarú körben BC ívhez tartozó középponti szöget $2\,x$-szel (65. ábra). A feladat követelménye:

$$2\,\varrho\,x = r.$$

Az ABD háromszög derékszögű (*Thales* tétele). Tehát

$$\varrho^2 = 2\,r \cdot \varrho \cos x.$$

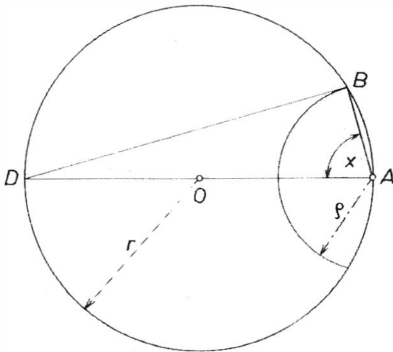
A megoldandó egyenlet

$$x \cos x = 0{,}25.$$

A feladatnak két megoldása van:

$$x_1 \approx 14{,}82°; \qquad \varrho_1 \approx 1{,}9335\,r;$$

$$x_2 \approx 79{,}64°; \qquad \varrho_2 \approx 0{,}3598\,r.$$



65. ábra

38. Megoldandó a

$$\varrho^2 x = \frac{r^2 \pi}{4}$$

egyenlet. Mivel $\varrho = 2\,r \cos x$, tehát a megoldandó egyenlet

$$x \cos^2 x = \frac{\pi}{16}.$$

Két megoldás:

$$x_1 \approx 11{,}74°; \qquad \varrho_1 \approx 1{,}9581\,r;$$

$$x_2 \approx 65{,}53°; \qquad \varrho_2 \approx 0{,}8286\,r.$$

39. A körcikk területe

$$t = \varrho^2 x = 4\,r^2 x \cos^2 x.$$

A maximum szükséges feltétele

$$\frac{dt}{dx} = 0.$$

Megoldandó a

$$\cos^2 x - 2\,x \sin x \cos x = 0$$

egyenlet.

Mivel $\cos x = 0$ nem lehet megoldás, az ekvivalens

$$1 - 2x \operatorname{tg} x = 0$$

egyenlet megoldását keressük a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ számközben. Érintő módszerrel $x = \frac{\pi}{4}$ kezdő értékkel

$$x \approx 0{,}6533 \approx 37^\circ\, 25'42''.$$

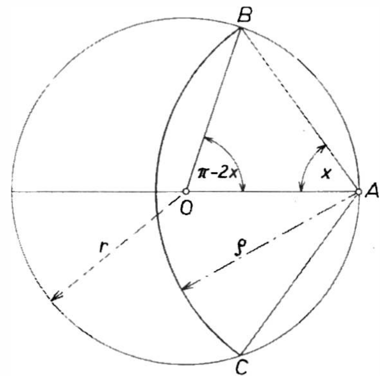
($\varrho = 2r \cos x$.)

40. Készítsünk vázlatot (66. ábra). A lelegelt terület a ϱ sugarú kör

$$\varrho^2 x$$

területű cikkéből és az r sugarú kör két körszeletéből tehető össze, mely utóbbiaknak területe egyenként

$$\frac{r^2}{2}(\pi - 2x) - \frac{r^2}{2}\sin(\pi - 2x)\ .$$



66. ábra

Figyelembe véve a $\varrho = 2r\cos x$ kapcsolatot, a megoldandó egyenlet

$$8x\cos^2 x + 2\pi - 4x - 2\sin 2x = \pi.$$

Helyettesítsünk $2x$ helyébe y-t:

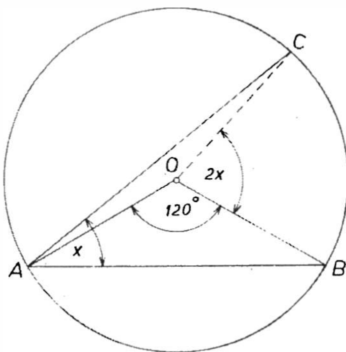
$$y\cos y - \sin y + \frac{\pi}{2} = 0\,.$$

A megoldás a $(0;\, \pi)$ számközben keresendő.

$$y \approx 109{,}2^\circ; \qquad x \approx 54{,}6^\circ;$$

$$\varrho = 2r\cos x \approx 1{,}158\, r.$$

41. Készítsünk vázlatot (67. ábra). Az AB húrhoz tartozó nagyobb körszelet összerakható a 240° középponti szöghöz tartozó $OACB$ körcikkből és az OAB háromszögből. Területe



67. ábra

$$r^2\frac{2\pi}{3} + \frac{r^2}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\,.$$

A kör területének AB és AC húrok közé eső része

$$r^2 x + \frac{r^2}{2}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{r^2}{2}\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right).$$

Megoldandó tehát a következő egyenlet:

$$\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} =$$

$$= x + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)$$

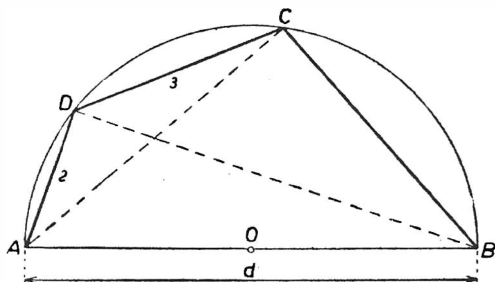
Helyettesítsünk $\frac{4\pi}{3} - 2x$ helyébe y-t:

$$y - \sin y = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Az egyenlet iterálással oldható meg: 0,01° pontossággal

$$x \approx 38{,}87°.$$

42. Készítsünk vázlatot (68. ábra). A körbe írható négyszögek oldalai és átlói között a következő kapcsolat áll fenn (*Ptolemaios*-tétel):



68. ábra

$$2 \cdot 4 + 3d = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Az átlókat *Pythagoras*-tételével kiszámítjuk:

$$8 + 3d = \sqrt{d^2 - 16} \cdot \sqrt{d^2 - 4}.$$

Megoldandó a

$$d^3 - 29d - 48 = 0$$

egyenlet.

Az egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van, amely a feladat megoldását adja. A feladat természetéből következik, hogy a megoldást a (0; 9) számközben kell keresni. Érintő módszerrel, $x = 7$ kezdő értékkel, négy tizedesre pontosan

$$d = 6{,}0752 \text{ cm}.$$

43. Jelöljük x-szel az $AC = CB$ ívekhez tartozó középponti szögeket és r-rel a körtárcsa sugarát.

$$a_1' = r \sin 0{,}01\,x; \qquad a_{100}' = r \sin x - r \sin 0{,}99\,x.$$

A megoldandó egyenlet

$$\sin x - \sin 0{,}99\,x = 0{,}9 \sin 0{,}01\,x.$$

Átalakítva:

$$\sin x \operatorname{tg} \frac{x}{200} + \cos x - 0{,}9 = 0.$$

Húrmódszerrel:

$$x \approx 25{,}97°; \qquad r = 13{,}70 \text{ cm}.$$

44. $\cos x$ és $\cos 3x$ között a kapcsolat:

$$4\cos^3 x - 3\cos x - \cos 3x = 0.$$

Megoldandó a

$$4y^3 - 3y - 0{,}5 = 0$$

egyenlet. A feladatot megoldó gyök a (0,5; 1) számközben van. Iterálással az

$$y = \sqrt[3]{\frac{3y + 0,5}{4}}$$

egyenletből $y = 1$ kezdő értékkel a 4 tizedesre pontos gyök

$$\cos 20° \approx 0,9397.$$

45. sin x és sin $3x$ között a kapcsolat:

$$4 \sin^3 x - 3 \sin x + \sin 3x = 0.$$

Megoldandó a

$$4y^3 - 3y + 0,5 = 0$$

egyenlet.

$$\sin 10° \approx 0,1736.$$

46. cos x és cos $5x$ között a kapcsolat:

$$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x.$$

Megoldandó a

$$16y^5 - 20y^3 + 5y - 0,5 = 0$$

egyenlet.

A keresett gyök a feladat természetéből folyóan a (0; 1) számközben van 1 közelében.

Átrendezzük az egyenlet bal oldalán álló polinomot *Horner* elrendezésével $y - 1 = z$ hatványai szerint:

$$16z^5 + 80z^4 + 140z^3 + 100z^2 + 25z + 0,5 = 0,$$

amelynek gyökét keressük a (—0,1; 0) számközben.

$$\cos 12° \approx 0,9781.$$

47. Jelöljük a sík feletti rész magasságát x-szel. A másik részé $(2 - x)$. Azt követeljük, hogy

$$\frac{x^2 \pi (3 - x)}{3} = n \frac{(2 - x)^2 \pi (1 + x)}{3}.$$

Meg kell oldani az

$$x^3 - 3x^2 + \frac{4n}{n + 1} = 0$$

egyenletet. A feladatból következik, hogy a megoldás az (1; 2) számközben keresendő.

A megoldás 4 tizedesre pontosan

ha $n = 2$, $x \approx 1,2261$ m,
ha $n = 3$, $x \approx 1,3472$ m,
ha $n = 4$, $x \approx 1,4257$ m.

48. Ha r a gömb sugara, és x a kiemelkedő süveg magassága, a vízbe merülő rész térfogata

$$\frac{\pi}{3}(4r^3 - 3rx^2 + x^3).$$

Archimedes törvénye szerint

$$\frac{\pi}{3}(4r^3 - 3rx^2 + x^3) = 0{,}75\,\frac{4r^3\pi}{3}.$$

A megoldandó egyenlet

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0,$$

amelynek a (0; 1) számközbe eső gyökét kell meghatározni.

$$x \approx 0{,}6527 \text{ m}.$$

49. A vízállás magasságát x-szel jelöljük. Meg kell oldani az

$$\frac{x^2\pi}{3}(3r - x) = 400$$

egyenletet. A feladat adatával az egyenlet

$$x^3 - 14{,}25x^2 + \frac{1200}{\pi} = 0.$$

A gyököt a (4,75; 9,5) számközben kell keresni.

$$x \approx 7{,}551 \text{ m}.$$

50. A függvény mindenütt differenciálható. Első deriváltjának a keresett helyen zérusnak kell lennie:

$$\sin x + x\cos x = 0.$$

Az egyenlet pozitív gyöke

$$x \approx 2{,}029.$$

A szélső érték *maximum*.

51. A keresett helyen a függvény második deriváltja zérus.

$$2\cos x - x\sin x = 0.$$

Érintő módszerrel (kezdő érték $x = 1$) 3 tizedesre pontosan:

$$x \approx 1{,}077.$$

52. A görbület képlete szerint

$$g = \left|\frac{6x + 2}{\left\{1 + (3x^2 + 2x)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

A szélső érték argumentumára nézve $\frac{dg}{dx} = 0.$

Meg kell oldani a

$$45x^4 + 60x^3 + 26x^2 + 4x - 1 = 0$$

egyenletet. Egyetlen pozitív gyöke a (0; 1) számközben van.

$$x \approx 0{,}1225.$$

53. A görbület képlete szerint

$$g = \left| \frac{2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\{1 + (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

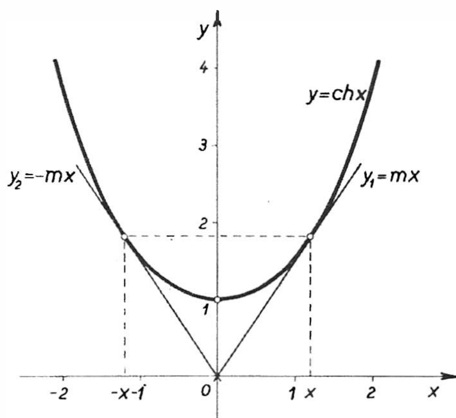
A szélső érték argumentumára nézve $\frac{dg}{dx} = 0$.

Jelöljük tg x-et m-mel, amelynek ki kell elégítenie a

$$3m^6 + 5m^4 - 2m^2 - 2 = 0$$

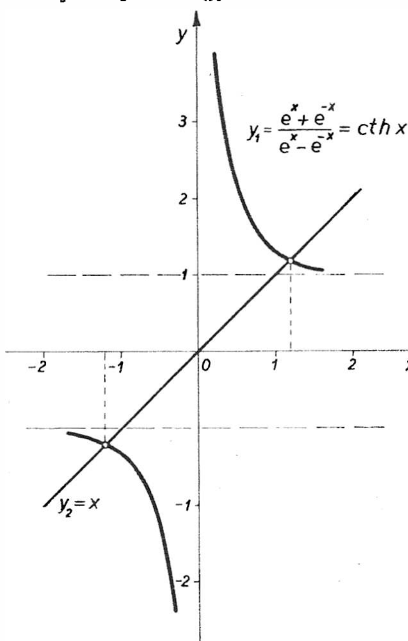
egyenletet. Írjunk m^2 helyébe t-t, akkor a t-re megoldandó egyenlet

$$3t^3 + 5t^2 - 2t - 2 = 0,$$



69. ábra

amelynek pozitív gyökeit keressük. Ilyen csak egy van, amely a (0; 1) számköz pontja.



70. ábra

$$\operatorname{tg}^2 x = t \approx 0{,}692$$

$$x \approx \pm 39°\,45'\,21''.$$

54. Készítsünk vázlatot (69. ábra). A keresett abszcisszák +1 és −1 közelében vannak. Az érintő iránytangensét m-mel jelöljük. A keresett abszcisszákra nézve teljesülnek

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = mx$$

és

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = m.$$

A két egyenletből (70. ábra)

$$x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Az $x = 1$ kezdő értékkel iterálással kapjuk, hogy

$$x \approx \pm 1{,}199678.$$

55. Az érintő vektor

$$r = [\cos t - t \sin t; \quad y(t); \quad z(t)].$$

Az x tengely egységvektora

$$i = (1, 0, 0).$$

A feladat követelménye, hogy e két vektor skaláris szorzata zérus legyen:

$$\cos t - t \sin t = 0.$$

Az egyenlet legkisebb pozitív gyöke a $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ számközben van; 4 tizedes pontossággal

$$t \approx 0{,}8603.$$

56. Jelöljük az AB gerenda hosszát x-szel. Hasonló háromszögekből

$$\frac{x}{a} = \frac{q}{y}; \quad \frac{x}{b} = \frac{p}{y}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{x}{y}$$

$$a + b = ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 b^2.$$

Helyettesítve

$$a^2 = 9 - x^2$$
$$b^2 = 16 - x^2$$
$$y = 1$$

és x^2-et u-val jelölve, u-ra a következő egyenletet kapjuk:

$$u^4 - 46 u^3 + 763 u^2 - 5374 u + 13529 = 0.$$

A feladatból kövekezik, hogy a keresett gyök a (0; 9) számközbe esik. Az első és a második derivált vizsgálatával eldönthető, hogy ebben a számközben egyetlen gyök van:

$$u \approx 6{,}43$$
$$x \approx 2{,}54 \text{ m}.$$

57. A keresztfej távolságát a forgattyúkar fix O pontjától x-szel jelöljük:

$$x = a \left[\cos \alpha + 5 \sqrt{1 - 0{,}04 \sin^2 \alpha}\right].$$

Az ω szögsebesség szerint differenciálva

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \left[\cos \alpha + 0{,}2 \frac{\cos 2\alpha + 0{,}04 \sin^4 \alpha}{\left(\sqrt{1 - 0{,}04 \sin^2 \alpha}\right)^3}\right].$$

Jelöljük: $\sin^2 \alpha = 5u$.

A szélső érték feltétele: $\ddot{x} = 0$. Ebből kapjuk az

$$u^3 - 5u^2 - 25u + 5 = 0$$

egyenletet.

$$u_1 \approx 0{,}19285; \quad u_2 \approx 8{,}0343; \quad u_3 \approx -3{,}2271.$$

Csak u_1 vezet a feladat megoldására:

$$\sin^2 \alpha = 0{,}96425; \quad \alpha \approx 79{,}1°.$$

A megoldás maximum.

58. Jelöljük a B végpontban ébredő reakció erőt Q-val, a rúd hosszát l-lel. A hajlító nyomaték a C pontban

$$Q(l - x) - Py.$$

A hajlított rúd semleges szálának közelítő egyenlete — a görbületi mérték képletében y'^2-et az 1 mellett elhanyagolva —

$$y'' = -\alpha^2 \left[y - \frac{Q}{P}(l - x)\right],$$

ahol α^2 jelenti a $\frac{P}{EI}$ hányadost. E a rugalmassági modulus, I a keresztmetszet másodrendű statikai nyomatéka a hajlítás tengelyére. Ha $x = 0$, akkor $y = 0$ és $y' = 0$.

Ezeket a feltételeket kielégítő megoldás

$$y - \frac{Q}{P}(l - x) = \frac{Q}{P}\left[\frac{1}{\alpha}\sin \alpha x - l \cos \alpha x\right].$$

Mivel $y = 0$, ha $x = l$, megoldandó a

$$\sin \alpha x - \alpha x \cos \alpha x = 0$$

egyenlet.

A 30. feladatban ezt az egyenletet megoldottuk. A legkisebb pozitív gyök

$$\alpha l \approx 4{,}493409 \approx \pi \sqrt{2{,}047},$$

amiből a keresett erő

$$P \approx \frac{2{,}047\, \pi^2\, EI}{l^2}.$$

59. Jelöljük φ-vel a mozgó ponthoz húzott $\overline{OP} = R$ sugár hajlásszögét a vízszinteshez. A mozgás egyenlete

$$ms'' = mg \cos \varphi - \mu \left[mg \cdot \sin \varphi + \frac{m}{R}(s')^2\right].$$

Ha a jobb oldalon a

$$-\mu \frac{m}{R}(s')^2$$

tagot elhanyagoljuk, közelítő megoldáshoz jutunk. Mivel $s = R\varphi$, a megoldandó differenciálegyenlet

$$R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\cos\varphi - \mu g \sin\varphi.$$

a kezdeti feltételek figyelembevételével kapjuk mint közbenső megoldást:

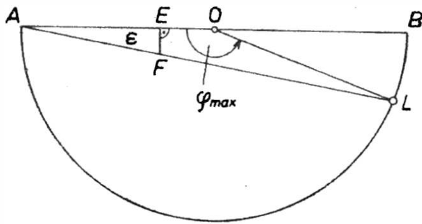
$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{R}(\mu\cos\varphi + \sin\varphi - \mu).$$

A legmagasabb L pontban $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, tehát

$$\mu\cos\varphi + \sin\varphi - \mu = 0$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\mu} = 6{,}66\ldots$$

Jelöljük az AL egyenes hajlásszögét a vízszinteshez ε-nal;



71. ábra

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_{max}}{2},$$

akkor

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \mu,$$

$$\varphi \approx 162{,}94°; \quad \varepsilon \approx 8{,}53°.$$

Szerkesztő megoldás (71. ábra):

A ponttól a középpont felé felrakjuk az l távolságot. Jelöljük ennek végpontját E-vel. Az E pontban merőlegesen felrakjuk az $\overline{EF}$ távolságot, melynek hossza μ. Az AF egyenes metszi a kört az L pontban.

Ha a közelítő megoldásban elhanyagolt tagot is figyelembe vesszük, a differenciálegyenlet

$$R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\cos\varphi - \mu g\sin\varphi - R\mu\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

A kezdeti feltételeket figyelembe véve a közbenső megoldás:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{R(1+4\mu^2)}\left\{3\mu\cos\varphi + (1-2\mu^2)\sin\varphi - 3\mu e^{-2\mu\varphi}\right\}$$

Az L pontban $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, tehát

$$\cos\varphi + \frac{1-2\mu^2}{3\mu} - e^{-2\mu\varphi} = 0.$$

Helyettesítve $\mu = 0{,}15$ számértékét, kiszámítandó a

$$\cos\varphi + 2{,}122\ldots\sin\varphi - e^{-0{,}3\varphi} = 0$$

egyenlet $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ számközbe eső gyöke 1′ pontossággal

$$\varphi \approx 143°\,56'$$

$$\varepsilon \approx 18°\,2'.$$

60. $F = \pi r^2 (x^2 - 1)$ egyenletből kiküszöböljük r-et, felhasználván a (+) egyenletet:

$$F = \frac{U^2 \pi}{E_0^2}\,\frac{x^2-1}{(\ln x)^2}.$$

A minimum szükséges feltétele $\frac{dF}{dx} = 0$:

$$\frac{2x}{(\ln x)^2} - \frac{2(x^2-1)}{x(\ln x)^3} = 0.$$

Mivel $x \neq 0$ és $\ln x \neq 0$, a megoldandó egyenlet

$$\ln x - \frac{x^2-1}{x^2} = 0$$

vagy

$$x = e^{\frac{x^2-1}{x^2}}$$

Az egyenletnek egyetlen valós gyöke van, amely 1-nél nagyobb, mely tehát a feladatot megoldja. Iterálással $x = 2$ kezdőértékkel indulva 3 tizedes pontossággal:

$$x \approx 2{,}218.$$

Itt a függvénynek minimuma van ($F'' > 0$).

61. A huzal alakjának egyenlete

$$y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}; \qquad (++)$$

ívhossza

$$l = 2\int_0^{\frac{d}{2}} \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = 2a\,\mathrm{sh}\frac{d}{2a}.$$

Az ívhossz képletében szereplő a és $\frac{d}{2a}$ kiszámítására szolgál az (++)-ből adódó

$$a + h = a\,\mathrm{ch}\frac{d}{2a} = a\left[1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{d}{2a}\right)^4 + \frac{1}{6!}\left(\frac{d}{2a}\right)^6 + \ldots\right],$$

ahonnan

$$h = a\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{d}{2a}\right)^4 + \ldots\right].$$

Legyen

$$\frac{d}{2a} = z.$$

Akkor

$$\frac{2h}{d}z = \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \ldots$$

Mivel $z \neq 0$, vele oszthatunk. Az osztás után az egyenletet átrendezzük:

$$z = \frac{4h}{d} - \frac{2}{4!}z^3 - \frac{2}{6!}z^5 \ldots = 0{,}4 - \frac{2z^3}{4!} - \frac{2z^5}{6!} - \frac{2z^7}{8!} - \ldots$$

Az egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van, amelyet $z = 0$ kezdő értékből kiindulva iterálással közelítünk meg. Minden lépésnél szaporítjuk a jobb oldalon tekintetbe vett tagok számát, és a maradék sor elhanyagolásával elkövetett hibát becsüljük (a maradék sort geometriai sorral majorizáljuk).

$$z_1 = 0{,}4$$
$$z_2 \approx 0{,}4 - 0{,}00533 - 0{,}00003 \approx 0{,}3946$$
$$z_3 \approx 0{,}39484.$$

A maradék sor elhanyagolása az utolsó kiírt tizedest már nem befolyásolja.)

Ebből $2a \approx 126{,}63$ m;

$$l \approx 126{,}63 \operatorname{sh} 0{,}39484 = 51{,}31 \text{ m}.$$

62. Kifejtve

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \ldots$$

Tagonként integrálva a 0 és z határok közt z-re a következő egyenletet kapjuk:

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{2!\,5} - \frac{z^7}{3!\,7} + \frac{z^9}{4!\,9} - \frac{z^{11}}{5!\,11} + \ldots = 0{,}4431135\ldots$$

Ebből

$$z = 0{,}4431135 + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{2!\,5} + \frac{z^7}{3!\,7} - \frac{z^9}{4!\,9} + \ldots$$

A $z = 0$ kezdő értékből iterálással közelítjük meg a gyököt. Minden lépésnél szaporítjuk a tekintetbe vett tagok számát és becsüljük a hibát.

$$z_1 \approx 0{,}44,$$
$$z_2 \approx 0{,}47,$$
$$z_3 \approx 0{,}476,$$
$$z_4 \approx 0{,}4766.$$

A maradéksor elhanyagolása az utoljára kiírt tizedest már nem befolyásolja. (z értéke 10 tizedesre pontosan 0,4769362762.)

c)

1. $x \approx 1{,}234;$ $y \approx 1{,}661.$

2. $x \approx 0{,}567;$ $y \approx 1{,}857.$ (72. ábra.)

3. Iterációval. $x_0 = 1,\ y_0 = 3,\ z_0 = 1$ kezdőértékkel:

$$x \approx 0{,}890;$$
$$y \approx 3{,}092;$$
$$z \approx 1{,}275.$$

4. $x \approx 0{,}23;$ $y \approx 0{,}37.$

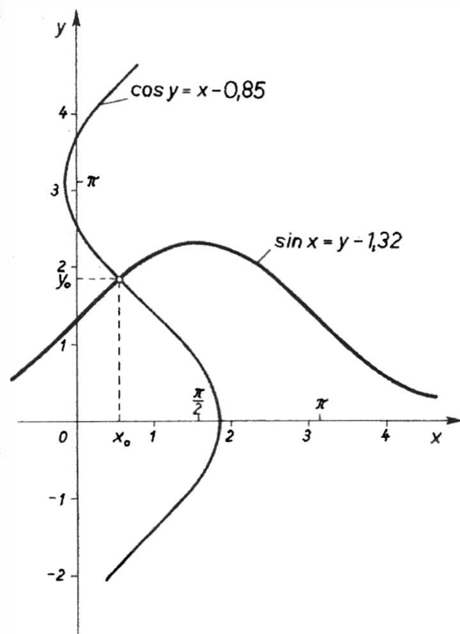
5. Jelöljük d-vel az adott pont távolságát a paraboloid valamely pontjától:

$$d^2 = (x - 10)^2 + (y - 12)^2 +$$
$$+ \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 15\right)^2 = f(x, y).$$

Az $f(x, y)$ függvény minimumát kell kiszámítani:

$$f_x = 2x - 20 + \frac{4x}{9}\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 15\right) = 0$$

$$f_y = 2y - 24 + y\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 15\right) = 0.$$



72. ábra

A felírt egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$$5xy + 48x - 90y = 0$$
$$4x^3 + 9xy^2 - 378x - 1620 = 0.$$

Az iterálás módszerét alkalmazzuk:

$$x = \frac{90y}{5y + 48} = F(x, y)$$

$$y = \frac{1620 + 378x - 4x^3}{9x} = G(x, y).$$

Induló értékek:

$$x_0 = 7{,}2; \quad y_0 = 6{,}6.$$

Az iterálás konvergens sorozatokra vezet, mert

$$F_x = 0; \qquad F_y(6,6) \approx 0,01;$$

$$G_x(7,2) \approx -0,8; \qquad G_y = 0.$$

A konvergálás lassú mert az $|G_x(7,2)|$ nem sokkal kisebb 1-nél.

$$x \approx 7,300, \qquad y \approx 6,555.$$

6. $z = x + yi$ helyettesítéssel a feladat ekvivalens az

$$x^3 - 3\,xy^2 - 4\,x - 5 = 0$$
$$(3\,x^2 - y^2 - 4)\,y = 0.$$

egyenletrendszer valós megoldásainak meghatározásával.

A valós gyök az

$$x^3 - 4\,x - 5 = 0$$

valós gyökével egyezik meg: $x \approx 2,457$.

A komplex gyökök az

$$x^3 - 3\,xy^2 - 4\,x - 5 = 0$$
$$3\,x^2 - y^2 - 4 = 0$$

egyenletrendszer valós megoldásaiból:

$$x \approx -1,228; \quad y \approx \pm\,0,726$$
$$z \approx -1,228 \pm 0,726\,i.$$

7. Az első kötél megnyúlása ξ_1, tehát benne az erő $c\,\xi_1$. A második kötél megnyúlása ξ_2, tehát benne az erő $c\,\xi_2$. Az ábrából leolvasható, hogy

$$(p_1 + \xi_1)\cos\alpha + (p_2 + \xi_2)\cos\beta = a$$

$$(p_1 + \xi_1)\sin\alpha - (p_2 + \xi_2)\sin\beta = 0.$$

Az egyensúlyi állapot következtében továbbá

$$c\,(\xi_1 \sin\alpha + \xi_2 \sin\beta) = G$$

$$\xi_1 \cos\alpha - \xi_2 \cos\beta = 0.$$

A négy egyenletből kiküszöböljük ξ_1-et és ξ_2-t:

$$p_1 \sin\alpha - p_2 \sin\beta + \frac{G \sin(\alpha - \beta)}{c \sin(\alpha + \beta)} = 0.$$

$$p_1 \cos\alpha + p_2 \cos\beta + \frac{2\,G \cos\alpha \cos\beta}{c \sin(\alpha + \beta)} = a.$$

Ezzel az egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$$f_1(\alpha, \beta) \equiv \sin\alpha - \frac{G}{ac}\cos\alpha - \frac{p_2}{a}\sin(\alpha+\beta) = 0,$$

$$f_2(\alpha, \beta) \equiv \sin\beta - \frac{G}{ac}\cos\beta - \frac{p_1}{a}\sin(\alpha+\beta) = 0$$

Behelyettesítve az adatokat

$$\sin\alpha - \frac{2}{9}\cos\alpha - 0{,}5\sin(\alpha+\beta) = 0,$$

$$\sin\beta - \frac{2}{9}\cos\beta - \frac{25}{36}\sin(\alpha+\beta) = 0.$$

Első közelítő értékek

$$\alpha_1 = 40°, \qquad \beta_1 = 55°.$$

$$f_1(40°, 55°) = -0{,}02554,$$

$$f_2(40°, 55°) = -0{,}00006.$$

A h és k javításokat a

$$\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}h + \frac{\partial f_1}{\partial\beta}k - 0{,}02544 = 0; \quad \frac{\partial f_2}{\partial\alpha}h + \frac{\partial f_2}{\partial\beta}k - 0{,}00006 = 0$$

egyenletekből számítjuk ki:

$$\{\cos\alpha + 0{,}2222\sin\alpha - 0{,}5\cos(\alpha+\beta)\}h - 0{,}5\cos(\alpha+\beta)\cdot k = 0{,}02554,$$

$$-0{,}6944\cos(\alpha+\beta)\cdot h + \{\cos\beta + 0{,}2222\sin\beta - 0{,}6044\cos(\alpha+\beta)\}\cdot k =$$

$$= 0{,}00006.$$

Behelyettesítve az első közelítő értékeket:

$$0{,}95246\,h + 0{,}04358\,k = 0{,}02554$$

$$0{,}06052\,h + 0{,}81613\,k = 0{,}00006,$$

ahonnan

$$h \approx 1{,}5°; \qquad k \approx -0{,}1°$$

$$\alpha_2 \approx 41{,}5°; \qquad \beta_2 \approx 54{,}9°.$$

5. §. GRAFIKUS MÓDSZEREK

1. A megoldást a 73. ábra tünteti fel.

Az A pontot rávetítjük az y tengelyre (A'). A pólust és a vetületet összekötő PA' egyenessel párhuzamost húzunk az origón át, amely átmegy a szerkesztendő görbe A_1 pontján (AA_1 párhuzamos az y tengellyel.)

Az ábra feltünteti a szögfelező B pontjához tartozó B_1 pont szerkesztését is.

2. A megoldást a 74. ábra tünteti fel.

A szerkesztés a 73. ábrán feltüntett szerkesztés megfordítása.

Az A pontot összekötjük az origóval, és az összekötő egyenessel párhuzamos egyenest húzunk a P póluson át. Ez a párhuzamos az y tengelyt az A' pontban metszi.

A szerkesztendő A_1 pont és az A' pont az x tengellyel párhuzamos egyenesen fekszik.

Az ábra feltünteti az $y = 1$ egyenes B pontjához tartozó B_1 pont szerkesztését is.

3. A parabola egy tetszőleges pontjának szerkesztése:

Az x tengely pozitív felén a K pont körül KO sugárral kört rajzolunk, amely az x tengelyt másodszor az L pontban metszi. L pontból az origó felé lemérjük az egységet: $PL = 1$. Jelöljük a P pont argumentumát x-szel. Az x tengelyre a P pontban merőlegest emelünk, amely a K pont körül rajzolt kört a parabola két pontjában (A és B) metszi (75. ábra).

4. A szerkesztést a 76. ábra tünteti fel.

A görbe A pontját rávetítjük az y tengelyre (A'). Az y tengelyen megjelöljük az A_y pontot úgy, hogy $A_yA' = 1$. A görbe érintője az A_yA egyenes.

5. A szerkesztést a 77. ábra tünteti fel.

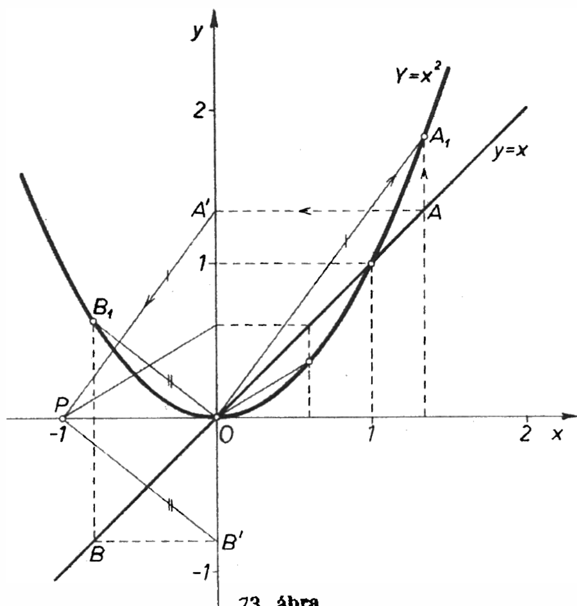
Az A pontban az ellipszishez simuló kör sugara $r_A = \frac{b^2}{a}$. C pontból merőlegest bocsátunk az AB egyenesre. Ennek az egyenesnek metszéspontja az OA féltengellyel (M) az A pontban simuló kör középpontja; az OB féltengellyel való metszéspont (N) a B pontban simuló kör középpontja.

A bizonyítás az MAC és az ABC derékszögű háromszögek hasonlóságán és az NBC és a BCA derékszögű háromszögek hasonlóságán alapszik.

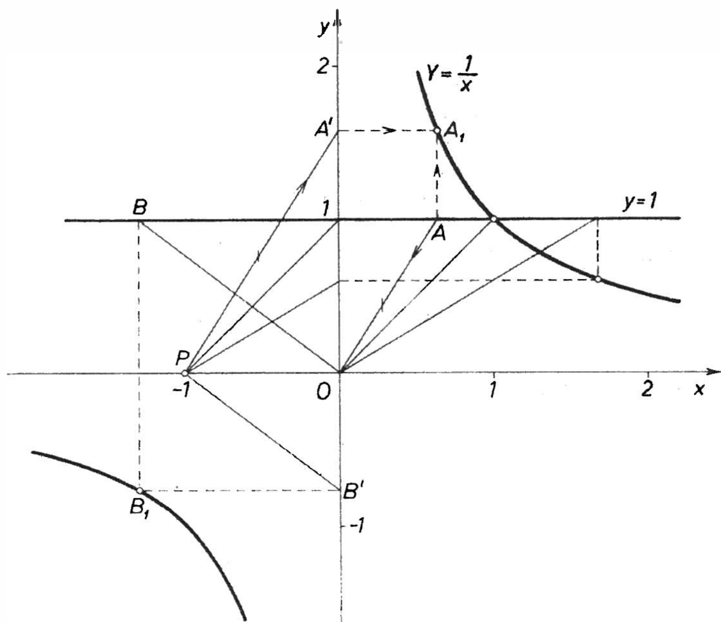
13. Lineáris interpolálással: $e^{1,6} \approx 5,48$. Másodfokú interpolálással: $e^{1,6} \approx 5,13$ (78. ábra).

Harmadfokú interpolálással 4,88 (79. ábra). Valójában $e^{1,6} \approx 4,96$.

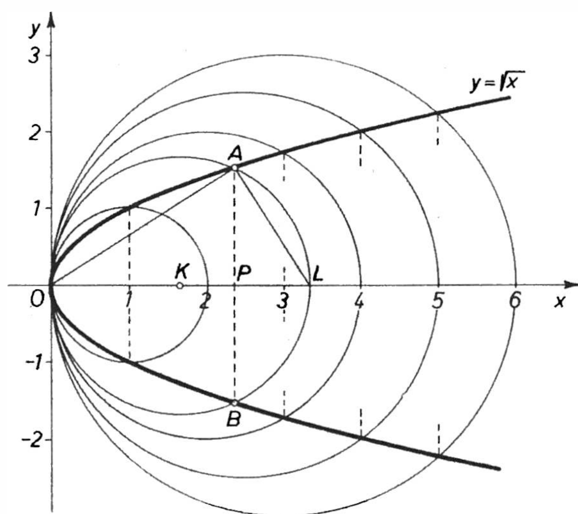
14. Kvadratikus interpolálással 200,2 és 214. Numerikusan 200,25 és 214,25 (80 ábra).



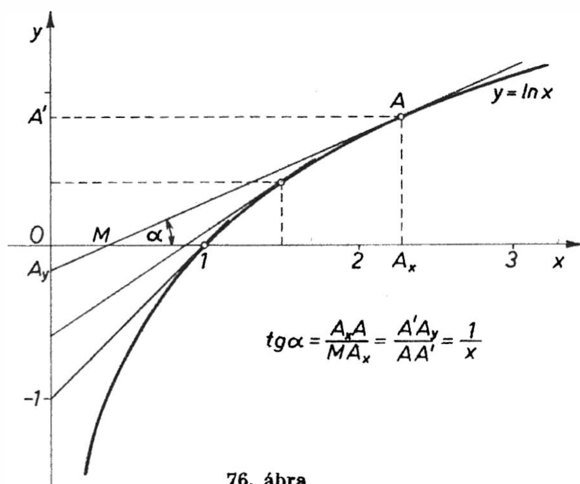
73. ábra



74. ábra



75. ábra

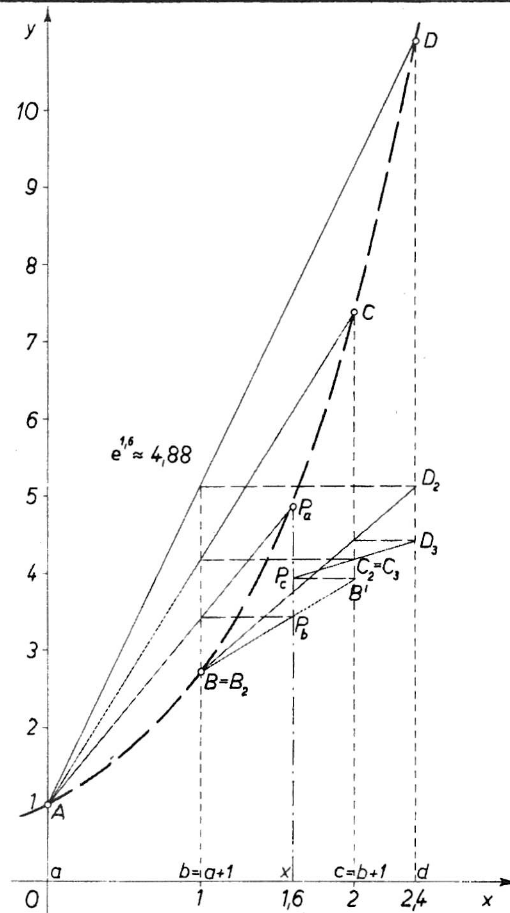


76. ábra

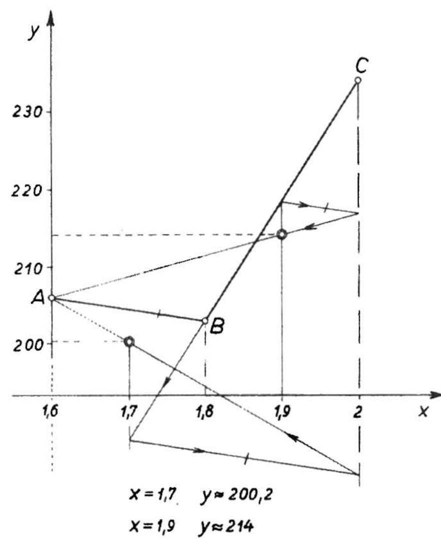
78. ábra

77. ábra

79. ábra



80. ábra



FELHASZNÁLT IRODALOM

MAGYAR NYELVŰ IRODALOM

Bermant A. F.: Matematikai analízis I—II., 1951.
Bjezikovics Ja. Sz.: Közelítő számítások, 1952.
Gjunter N. M.—Kuzmin R. O.: Felsőbb matematikai példatár I—II., 1952.
Hajós György: A hibabecslés alapjai, Matematikai és Fizikai Lapok, 49. kötet, 1942.
Jordán Károly: Matematikai statisztika, 1927.
Muttnyánszky Ádám: Statika, 1951.
Oltay Károly: Geodézia, 1951.
Pelikán József: Fokozatosan közelítő számítási módszerek néhány alkalmazása tartószerkezetek tervezésénél, 1953.
Rényi Alfréd: A *Newton*-féle gyökközelítő eljárásról. Matematikai Lapok, I. kötet, 1950.

IDEGEN NYELVŰ IRODALOM

Baule B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs — VIII., 1950.
Duschek A.: Vorlesungen über höhere Mathematik I—II., 1949.
Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch I—III., 27. Auflage, 1949.
Jakowlew K. P.: Mathematische Auswertung von Messungsergebnissen.
Jordan Ch.: Calculus of Finite Differences, 1939.
Kármán Th.—Biot M. A.: Mathematical Methods in engineering, 1940.
Kowalewski G.: Determinantentheorie, 1909.
Locher—Ernst: Differential und Integralrechnung, Basel, 1948.
Lüroth J.: Vorlesungen über numerisches Rechnen, 1900.
Mann H. L.: A Text-book on Practical Mathematics for advanced technical students, 1945.
Markoff A. H.: Differenzenrechnung, Deutsche Übersetzung, Leipzig, 1896.
Rényi A.—Turán P.: On the zeros of polynomials, Acta Mathematica Acad. Scient. Hung., III. kötet, 1952.
Ritz—Baur: Handbuch der Mathematischen Statistik, Teubnér, 1930.
Rothe R.: Höhere Mathematik I—V., Leipzig, 1949, Teubner.
Runge C.: Graphische Methoden, Teubner, 1928.
Runge C.: Praxis der Gleichungen, de Grujter, 1921.
Runge C.—König H.: Vorlesungen über numerisches Rechnen, Springer, 1924.
Salvadori M. G.—Baron M. L.: Numerical Methods in Engineering, N. Y., 1952.
Sanden H.: Praktische Analysis, Teubner, 1923.
Sanden H.: Praktische Mathematik, Teubner, 1951.
Scarborough J. B.: Numerical Mathematical Analysis.
Schmeidler W.: Vortrage über Determinanten und Matrizen, Berlin, 1949.
Seliwanoff D.: Lehrbuch der Differenzenrechnung, Leipzig, 1904.
Szegal—Szemendjajev: Jatiznacsnje Matematicseszkije Tablici, Moszkva—Leningrád, 1900.
Turán Pál: On approximative solution of algebraic equations, Publ. Math. Debrecen, 1951.
Willers A.: Methoden der praktischen Analysis, 1928.

A kiadásért felelős a Tankönyvkiadó igazgatója
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Lojd Lajos
Műszaki szerkesztő: Selmeci Györgyné
A kézirat nyomdába érkezett: 1977. május. Megjelent: 1978. április
Példányszám: 1000. Terjedelem: 19 (A/5) ív
Készült az 1965. évi második kiadás alapján, könyvből fotózva, rotációs mélynyomással,
az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint
Raktári szám: 44231/V.



78.1470 Egyetemi Nyomda, Budapest,
Felelős vezető: Sümeghi Zoltán igazgató

21,— Ft

44231/V. **B. V. NUMERIKUS ÉS GRAFIKUS KÖZELÍTŐ MÓDSZEREK**